Sul concetto di simmetria, da Galileo alla teoria quantistica dei campi

Luciano Boi

1. Osservazioni introduttive; il principio di relatività da Galileo a Einstein

In questo testo parleremo brevemente anzitutto del pensiero di Galileo Galilei in riferimento ad alcune sue idee e più in generale alla sua concezione della fisica, della matematica e dei loro rapporti, idee e concetti che peraltro variano in modo significativo nei suoi scritti; in seguito parleremo più diffusamente degli sviluppi successivi che questa concezione ha avuto, in particolare nei secoli XIX e XX.

Per la maggior parte degli storici e filosofi della scienza[1], l'immagine della natura costruita dalla nuova scienza dei secoli XVII e XVIII presenta alcune caratteristiche essenziali, che possono essere enunciate sinteticamente come segue: (i) la "rivoluzione scientifica" del 600 tentò di smantellare le basi della fisica qualitativa, che si devono perlopiù ad Aristotele ma che furono più tardi riprese da autori come Duns Scoto (1265-1308), Nicola Oresme (1325-1382) e Nicola Cusano (1401-1464), e costruì un universo corpuscolare-meccanico; (ii) essa sostituì all'apriorismo (cioè ai principi teorici e/o metafisici dati a priori), al principio di autorità e al vacuo verbalismo scolastico la lettura diretta, ovverosia l'osservazione e l'indagine delle cause dei fenomeni, del "libro della natura"; (iii) essa affermò che l'esperimento doveva essere fondato su ipotesi teoriche e fattuali, sulla registrazione attenta dei fe-

1 Si vedano, ad esempio: Paolo Rossi, *La scienza e la filosofia dei moderni*, Torino, Bollati Boringhieri, 1989; Paolo Casini, *La natura*, Milano, Mondadori, 1979.

DOI 10.35948/DILEF/978-88-6032-827-4.09

Luciano Boi, École des Hautes Études en Sciences Sociales, Centre de Mathématiques e Programme Philosophie & Épistémologie, boi.luciano@ehess.fr, 0000-0001-7238-4320

nomeni e del loro ripetersi, la misurazione e il calcolo. Questi assunti, nelle intenzioni dei maggiori scienziati del '600, servivano a liquidare i pregiudizi e le categorie mentali che avevano sorretto per quindici secoli la scienza peripatetica insegnata da Aristotele e dai suoi allievi.

Dopo Copernico e Keplero, Galileo è quasi unanimemente considerato uno degli artefici della rivoluzione della scienza moderna che, secondo la maggior parte dei commentatori, avrebbe demolito la concezione della natura e della conoscenza che si era imposta per circa quindi secoli nelle accademie e nelle università, e le cui fonti di ispirazione erano essenzialmente due, entrambe originatesi nell'antica Grecia: quella platonica e quella aristotelica. La prima attribuiva agli enti matematici, in particolare a quelli geometrici, una natura ideale, cioè "esistenti" in un mondo di idee e proprietà perfette e incorruttibili, ai quali gli oggetti fisici si conformavano solo in modo parziale e approssimativo; e quella aristotelica, che sebbene riconoscesse alla matematica un ruolo importante nella conoscenza della natura, sottolineava il fatto che tra i concetti matematici e i fenomeni naturali non esiste solo una relazione ideale o astratta, logico-deduttiva, ma una reale interazione che può avere una certa incidenza causale e pertanto produrre effetti fisici. Un esempio importante di questa interazione è la teoria elaborata da Aristotele, che studia i rapporti tra forma e sostanza e cerca di mostrare che la (o il tipo di) forma, dove per "forma" si intende anche il *bordo* di un oggetto o di un corpo (oggi parliamo della "forma globale" di una varietà o di uno spazio e distinguiamo gli spazi che hanno un bordo da quelli che ne sono privi: ad esempio, il piano e la sfera sono varietà bidimensionali senza bordo, mentre il disco contiene un bordo e il cilindro due), può influenzare le qualità e il comportamento della sostanza – ossia di un determinato tipo di materia –, e, reciprocamente, il tipo di materia – cioè il suo stato e le sue proprietà – consente determinate variazioni della forma iniziale di un oggetto o di un corpo. Diversi autori, moderni e contemporanei, hanno ripreso la teoria di Aristotele migliorandola e riformulandola: basti pensare alle idee di Leibniz sulle proprietà dinamiche dei corpi o a quelle di Riemann sui rapporti tra le configurazioni geometriche degli oggetti e le loro proprietà fisiche (per esempio nei fluidi).

La parola “quasi” utilizzata all’inizio del precedente paragrafo sta a indicare il fatto che alcuni storici e filosofi della scienza hanno criticato una tale ricostruzione ritenendola troppo semplicistica e per molti aspetti infondata. Citiamo qui la ricostruzione storiografica accurata, fatta a partire dalle fonti e dai testi originali, condotta da Lucio Russo in particolare nella sua importante opera *La rivoluzione dimenticata* (prima ed., 1996; nuova ed.: Feltrinelli, 2021). Russo critica in modo sostanziale la ricostruzione storiografica, prevalente tra gli storici e i filosofi della scienza, della nascita e dello sviluppo della scienza moderna, che attribuisce essenzialmente a Galileo e Newton. Nella sua meticolosa indagine Russo mostra che, in realtà, le sue origini risalgono a più di 2000 anni prima, cioè al periodo ellenistico e alle importanti scoperte fatte tra il IV e II secolo a.C. da matematici e fisici come Euclide, Archimede, Eratostene, Aristarco di Samo e tanti altri. Fu grazie alle loro scoperte e teorie che nacque il metodo scientifico. Il ruolo svolto dal loro pensiero scientifico, fondato spesso su concetti filosofici e metafisici esposti con sorprendente rigore e immaginazione, in particolare nei campi della matematica, dell’astronomia e della fisica, della biologia e della medicina, è stato essenziale non solo per l’affermazione della “civiltà classica”, ma anche perché ha fornito le basi teoriche e sperimentali a molti degli sviluppi successivi ad opera degli scienziati e filosofi dei secoli XVI e XVII, in particolare grazie alle scoperte di Copernico, Bruno, Keplero, Galileo, Descartes, Newton e Leibniz.

Appoggiandosi su idee e risultati ottenuti da diversi autori nei secoli precedenti e in particolare sulla rivoluzione astronomica esposta da Niccolò Copernico nel *De revolutionibus orbium cœlestium* (opera pubblicata in latino nel 1543), Galileo riuscì a dare una alquanto tormentata formulazione della legge matematica della caduta dei gravi, fece alcune scoperte astronomiche, enunciò il “principio di relatività”, i principi di inerzia e di scomposizione delle forze, e fu un convinto assertore dell’importanza e della validità del sistema copernicano, tant’è che molti dei suoi sforzi come scienziato furono rivolti a farne riconoscere il carattere di svolta radicale nella concezione dell’universo. Il principio di relatività sarà sviluppato nei secoli successivi e diventerà uno dei principi fondamentali dell'intera fisica grazie soprattutto alle scoperte fatte da Einstein con la sua teoria della relatività ristretta del 1905.

Il *principio di relatività* lo troviamo enunciato in vari modi e anche in vari contesti empirici ma prevalentemente mediante "esperienze di pensiero" (*Gedankenexperimente*). *Il principio di relatività galileiano* afferma che nessuna esperienza eseguita all'interno di un sistema di riferimento può rivelarne un moto traslatorio rettilineo uniforme, rispetto a un riferimento fisso o, più genericamente, inerziale. In altri termini, qualsiasi esperienza od osservazione eseguita all'interno di un corpo è atta a rivelarne un motto rettilineo soltanto a patto che questo non sia un moto traslatorio rettilineo uniforme. Nella formulazione galileiana del principio, l'impossibilità appena espressa è limitata alle esperienze meccaniche.

Einstein affermerà che tale impossibilità sussiste per esperienze di qualsiasi natura, e tale asserzione costituisce, come vedremo più avanti, uno dei postulati fondamentali della teoria della relatività ristretta (o speciale) del 1905. Nella relatività generale (1915-16), le due fondamentali proprietà della materia che sono la gravitazione e l'inerzia venivano ad essere ricondotte da Einstein a uno stesso principio, potendosi considerare ambedue come dovute alle proprietà geometriche della spazio-tempo o, fisicamente, alla distribuzione, variabile nel tempo, della materia e dell'energia.

Nella relatività ristretta si parla di principio di equivalenza tra massa ed energia: considerando che le due "quantità" fisiche si uguagliano, Einstein ha fatto compiere alla fisica un profondo cambiamento concettuale. Il *principio di equivalenza* di Einstein (relatività generale) ci dice che, dal punto di vista della meccanica classica, un sistema di riferimento situato in un campo gravitazionale è meccanicamente equivalente a un sistema di riferimento uniformemente accelerato. Il fatto che i due sistemi siano fisicamente equivalenti significa che tutti i processi fisici si svolgono nei due sistemi seguendo le stesse leggi. Alla base del principio di equivalenza c'è il fatto fondamentale che il campo gravitazionale imprime localmente a tutti i corpi la stessa accelerazione, data l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale, e questo si spiega con il fatto che la massa inerziale e la massa gravitazionale sono equivalenti.

Va comunque detto che già alcuni teologi, filosofi e scienziati tardo medievali o “pre-moderni”, come Duns Scoto, Nicola Oresme e Nicola Cusano, studiarono quei fenomeni ed elaborarono idee e teorie di un profondo acume concettuale, alle quali, va aggiunto, Galileo non fece alcun preciso riferimento, anche se molto probabilmente egli era a conoscenza delle idee di Oresme poiché erano insegnate all’Università di Padova dove insegnava lo scienziato pisano. Il caso di Oresme, filosofo della Scolastica e tra i più originali pensatori del XIV secolo, è particolarmente interessante. Egli fu autore di un “Trattato sulla configurazione delle qualità e del movimento” (*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, 1356) in cui espone il suo metodo per rappresentare graficamente (tramite diagrammi) le variazioni di una grandezza, che chiama *qualità*, in funzione di un’altra. In altre parole, egli introduce il concetto matematico di *relazione funzionale*, cioè di *funzione*, tra due variabili che variano una in funzione dell’altra; concetto che neanche Galileo riuscirà a formulare in maniera generale, e infatti bisognerà aspettare i lavori di Newton e Leibniz sull’analisi infinitesimale per trovarne un enunciato preciso.

Oresme considera per esempio un corpo nel quale il calore non è omogeneo, ma varia secondo il luogo e la misura. Per rappresentare le variazioni del calore all’interno del corpo, egli immagina una retta tracciata sul corpo. Chiama *longitudino* (che corrisponde al nostro asse orizzontale delle *ascisse*) la distanza che separa un punto qualsiasi della retta da un ‘punto origine’ fissato arbitrariamente. In ciascun punto di questa retta egli traccia una perpendicolare la cui altezza, che chiama *latitudino* (l’equivalente del nostro asse verticale delle *ordinate*), è proporzionale all’intensità del calore nel punto corrispondente del corpo. Ottiene così una figura geometrica il cui studio non solo facilita l’analisi delle variazioni del calore, ma in più ha il pregio di evidenziare il fatto importante che i cambiamenti nel diagramma geometrico sono tutt’uno con le variazioni dello stato fisico del corpo materiale. Non ci troviamo quindi di fronte a una mera rappresentazione grafica del variare di due quantità messe in relazione tra di loro, ma a un diagramma intrinsecamente spaziale le cui variazioni riflettono cambiamenti che avvengono nella qualità (nel caso specifico si tratta del calore) o nelle qualità dei corpi.

> La proprietà di questa qualità – scrive Oresme – saranno esaminate più chiaramente e più facilmente quando qualcosa che le è simile è disegnato su una figura piana, e questa cosa, resa chiara cioè visibile, viene colta rapidamente e perfettamente dall'immaginazione [...] perché l'immaginazione della figura aiuta grandemente la conoscenza delle cose stesse.

Nel passo finale della citazione Oresme sottolinea un punto importante, ossia l'importanza dell'immaginazione nel processo della conoscenza, e più precisamente ancora l'importanza delle immagini mentali per penetrare nelle proprietà stesse delle cose (dei corpi). Cosicché le figure, i grafi o i diagrammi non sono un mero strumento utile per descrivere le variazioni di quantità ma dei modelli atti a spiegare i cambiamenti qualitativi dei corpi[2]. Egli intraprende poi, infatti, uno studio matematico delle figure piane ottenute grazie alle rappresentazioni grafiche della qualità. Fa loro subire delle trasformazioni geometriche semplici cercandovi delle proprietà invarianti, il che lo porta a una classificazione delle curve. Alcuni storici vedono in Oresme un precursore di Cartesio poiché di fatto avrebbe posto le basi della geometria analitica. Il nostro autore non si ferma tuttavia a uno studio completamente astratto, tanto è vero che applica la sua idea di *configurazione* allo studio di diversi fenomeni, in particolare in biologia: egli afferma, per esempio, che il calore naturale di un leone si comporta in modo diverso da quello di un asino o di un bue. E dà la seguente spiegazione: «Esso [il calore] gli fornisce una potenza più grande, non solamente perché è più intenso, ma anche perché la sua rappresentazione grafica è diversa». Così, sembra esserci un nesso tra la proprietà fisica e la variazione spaziale, nesso che contribuisce a produrre dei cambiamenti qualitativi nei corpi.

2 Su questo ed altri aspetti del pensiero matematico di Oresme, cfr. le analisi interessanti di GILLES CHÂTELET, *Les enjeux du mobile*, Parigi, Éditions du Seuil, 1993.

La parte forse più rilevante dell'opera di Oresme è quella in cui l'autore applica la sua "dottrina della configurazione" a uno studio delle proprietà del movimento. Qui Oresme dà tutta la misura del suo genio. Si tratta della parte della sua opera che esercitò un'influenza duratura sui suoi contemporanei e che senza dubbio ha lasciato una traccia importante nella storia della scienza del moto. Per descrivere e studiare un movimento rettilineo, Oresme ha l'idea di rappresentare graficamente la velocità istantanea del corpo mobile in funzione del tempo. Su una retta orizzontale riporta una scala proporzionale al tempo, da cui traccia delle perpendicolari la cui lunghezza è proporzionale alla velocità del mobile nell'istante corrispondente. Egli s'interessa particolarmente a esaminare la regione del piano in cui compaiono queste perpendicolari successive. Grazie allo studio di casi particolari semplici e la loro generalizzazione, Oresme giunge alla conclusione che l'area della superficie interessata dalle diverse perpendicolari tracciate a partire da ciascun punto della scala del tempo è proporzionale alla distanza percorsa dal mobile durante l'intervallo di tempo. Questo postulato è alla base delle scoperte relative al moto uniformemente accelerato. Attraverso un sottile ragionamento matematico e aiutandosi con una altrettanto penetrante intuizione spaziale e rappresentazione diagrammatica, Nicolas Oresme perviene a stabilire *la legge fondamentale del moto rettilineo uniformemente accelerato*, vale a dire che, se *la velocità all'istante iniziale* v_o *è nulla, la distanza percorsa sarà proporzionale al quadrato del tempo* t^2.

Questa legge ebbe una notevole diffusione nel periodo trascorso tra Oresme e Galileo e fu insegnata ad Oxford dal filosofo, logico e matematico britannico William Heytesbury (1313-1372) e dai suoi discepoli. Una delle ragioni per cui abitualmente si attribuisce questa legge a Galileo, è perché lo scienziato pisano ha avuto l'idea di utilizzare un piano inclinato per verificare sperimentalmente quale legge si applicasse al moto di caduta dei corpi. Ma anche perché Galileo non fu particolarmente propenso a riconoscere il valore delle scoperte fatte dagli scienziati che l'avevano preceduto. È il caso di Archimede per quanto riguarda la matematica (proprietà delle spirali, definizione dell'area e del volume della sfera, enunciato del problema della quadratura della parabola, in cui egli dimostra con vari metodi che *l'area di un segmento di parabola vale quattro terzi l'area del triangolo avente la stessa base*), la meccanica razionale (il principio della leva), la meccanica dei fluidi (principio di Archimede) e l'astronomia. È anche il caso di Keplero per quanto riguarda le sue scoperte astronomiche sul moto planetario (*Astronomia nova*, 1609), e di Giordano Bruno in relazione alle sue strabilianti idee che ammettevano la natura infinita dell'universo e la possibile esistenza di un numero infinito di mondi (ovvero di galassie) all'interno di esso (in *De l'infinito, universo e mondi*, 1584). Va infine osservato che il *Trattato sulla configurazione delle qualità e del movimento* è stato un momento importante dello sviluppo concettuale della scienza e della filosofia della natura. La dottrina di Oresme fu diffusa in tutta Europa, tra cui l'Italia. Tuttavia, non circolò l'opera originale, ma un compendio intitolato *Tractatus de latitudinibus formarum*, nel quale mancavano alcuni metodi e ragionamenti importanti sviluppati da Oresme nel suo Trattato originale. Alcune lacune furono colmate dal filosofo e matematico parmigiano Biagio Pelacani (1355-1416), che insegnò a Padova. I suoi scritti ebbero larga diffusione in Italia, ed è probabile che Galileo per suo tramite fosse a conoscenza delle scoperte di Oresme.

Sul piano filosofico, non senza una certa temerarietà, Galileo oppose alle convinzioni dei 'filosofi in libris' la certezza che la vera filosofia naturale era tutta da costruire, facendo domande singole e chiare alla natura, costringendola a rispondere con precisione, generalizzando le risposte sotto forma di leggi, confrontando di nuovo le leggi con l'esperienza. Ipotesi teorico-fattuali e verifica matematica, induzione e deduzione, analisi e sintesi, sono per Galileo momenti ed elementi estremamente interconnessi del "buon" metodo scientifico, che tuttavia non troviamo mai espressamente compendiati in enunciati precisi.

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (1632), l'interlocutore copernicano Salviati critica Aristotele per aver costruito la 'fabbrica del mondo', ossia il cosmo geocentrico e geostatico secondo i precetti di una 'architettura' arbitraria, ovvero la distinzione ontologica tra moti circolari e moti rettilinei, tra mondi incorruttibili e perfetti e sfera sublunare. C'è comunque da notare a questo proposito che la concezione di Aristotele, che egli espone nelle sue due opere maggiori che trattano della "filosofia della natura", la *Fisica* e la *Metafisica*, è ben più ricca e complessa e viene spiegata dall'autore con argomenti fisici e formali spesso esposti in modo rigoroso.

Va anche precisato che i precetti d'architettura galileiana non derivano da una fonte unica, ma da più fonti antiche. Anzitutto la statica e l'idrostatica di Archimede, dal quale Galileo apprese a impostare quantitativamente, matematicamente il problema della caduta dei gravi e del moto in generale; in secondo luogo la certezza che il mondo fisico possedesse una determinata struttura geometrica e fosse conforme a leggi matematiche precise, ch'egli amava esprimere in termini platonici; e ancora, dalla concezione corpuscolare della materia e della sensazione, che risale a Democrito.

Quando nel 1609 Galileo volse il cannocchiale verso il cielo, fu un evento memorabile nella storia del pensiero umano. È noto che cosa "vide" e annunciò al mondo con la pubblicazione nel 1610 del breve trattato di astronomia, *Sidereus Nuncius*. La Luna gli apparve "aspra e ineguale, ripiena di protuberanze e di cavità simili ma assai maggiori ai monti e alle valli della Terra"; su quei monti sorgeva e tramontava il sole come sulla Terra. La Via Lattea si rivelava un enorme ammasso di stelle lontanissime, i pianeti e le costellazioni apparivano più distinti.

In quegli stessi anni in cui Galileo era intento a osservare le caratteristiche irregolari e imperfette della Luna e a mostrare l'esistenza di satelliti orbitanti intorno al pianeta Giove, le cui traiettorie variano geometricamente e la loro direzione è retrograda rispetto al senso di rotazione di Giove, il matematico, astronomo, fisico e teologo tedesco Johannes Kepler era dedito a scoprire le ragioni geometriche dell'armonia del cosmo e a elaborare una teoria matematica capace di spiegare le leggi del moto e dunque la dinamica dei corpi celesti nell'Universo. Galileo e Keplero si scambiarono lettere di collaborazione e di stima riguardo alle scoperte del *Sidereus Nuncius*, ma l'uno non conobbe o non apprezzò la scoperta kepleriana delle ellissi, né l'altro seppe utilizzare i concetti essenziali della dinamica galileiana. Descartes, d'altra parte, scorse con poca attenzione il *Dialogo sui massimi sistemi*… e non dette molto credito al metodo sperimentale galileiano. Il filosofo e matematico ritrovò a sua volta insieme con il filosofo e scienziato Isaac

Beeckman la legge del moto uniformemente accelerato e "geometrizzò" il concetto di inerzia all'interno di una concezione rigorosamente euclidea dello spazio.

Un progresso decisivo fu ottenuto dal fisico e matematico britannico Isaac Newton poco più di cinquant'anni dopo le osservazioni e scoperte importanti fatte da Galilei. A partire dal 1666, Newton riuscì ad unificare in una teoria coerente e armonica i diversi risultati di Keplero sulle cause dei moti planetari e di Cartesio sul peso dei corpi sulla Terra, dando alle leggi dinamiche elaborate dai suoi predecessori una sistemazione teorica decisamente più intelligibile. Risolto il problema dinamico del moto di un corpo grazie al modello geometrico dell'elisse introdotto da Keplero, Newton unificò concettualmente il principio cartesiano del moto rettilineo uniforme di una particella materiale in *vacuo*, la legge galileiana della scomposizione delle forze e le tre leggi di Keplero circa i moti planetari, pervenendo così, progressivamente, alla formulazione matematica della *legge di gravitazione universale*, secondo la quale *i corpi nell'universo si attraggono in ragione direttamente proporzionale alle loro masse e inversamente proporzionale alle loro distanze*.

Tale legge rappresentava la definitiva unificazione della fisica terrestre e della fisica celeste, nel cui contesto la legge galileiana della caduta dei gravi veniva vista come un caso particolare della legge di gravitazione universale.

Si può capire che Newton abbia detto «hypoteses non fingo» sulla causa della gravitazione, essendosi pronunciato in favore di un tempo e di uno spazio assoluti non avrebbe mai potuto trovare nella geometria l'origine e l'interpretazione della gravitazione. E, del resto, come avrebbe potuto immaginare una geometria diversa da quella euclidea, l'unica nota al suo tempo?

2. Alla ricerca della simmetria: da Platone a Keplero

Una certa concezione della matematica, ispirata alle idee di equilibrio, armonia e giusta proporzione fu elaborata da Platone e dai suoi discepoli, e insegnata nell'accademia fondata da Platone ad Atene nel 387 a.C. Essa venne in seguito ripresa e sviluppata dalla corrente neo-platonica. Uno dei contributi fondamentali della filosofia platonica e del neoplatonismo allo studio della natura consistette nell'importanza attribuita alla geometria nella formazione intellettuale. Nel dialogo *Repubblica*, Platone rilevò la necessità della matematica come esercizio per la mente che cerca di comprendere le forme nella loro possibile perfezione. Già per Platone, la geometria consente di conoscere ciò che si conserva nel cambiamento, ed è perciò l'origine di un certo ordine (dinamico e non statico) della natura e forse della mente. Oggi diciamo che la geometria (la quale nel frattempo si è arricchita di molte nuove nozioni e teorie) cerca di conoscere quelle strutture matematiche che si conservano al seguito di determinate trasformazioni (simmetrie) e deformazioni (per esempio immersioni), ed è questa invarianza che assicura una certa stabilità del mondo matematico e del mondo reale, che si suppongono essere profondamente connessi. Nel *Timeo* Platone espone la sua cosmologia e consegna alla tradizione successiva l'idea che tutto sia retto dalla simmetria, da rapporti e proporzioni. I *solidi platonici*, cioè i sei poligoni regolari, sono una chiara espressione di questo principio e riflettono l'idea che il mondo fisico segue un certo ordine ideale senza mai però poterlo raggiungere. A questo proposito, il fisico Werner Heisenberg ha osservato che:

> Per Platone, al limite inferiore [a fondamento] degli enti materiali non si trova più in realtà qualcosa di materiale, ma una forma matematica; diciamo una struttura che non è solo fisica, ma metafisica. L'elemento primordiale che ci permette di comprendere unitariamente il mondo è, in Platone, la simmetria matematica, l'immagine, l'idea, da qui il nome d'*idealismo* per la concezione platonica. [...] Per Platone la forma è caratteristica per le proprietà dell'elemento materiale considerato, ne costituisce parte essenziale delle sue proprietà fisiche. Contrariamente a quanto pensava Democrito, in Platone le particelle di materia (terra, acqua, aria, fuoco) non sono invariabili e indistruttibili; al contrario esse possono essere scomposte in triangoli ed essere ricostituite da triangoli (e dunque non hanno più niente di fisico).

Tuttavia, fu Keplero a sottolineare tutta l'importanza della simmetria per la conoscenza delle "vere" cause dell'ordine del cosmo e del mondo fisico. Per lui, non solo il cerchio e la sfera avevano anche un significato in un certo senso "divino", oltre che matematico, ma in più riteneva che fossero archetipi che strutturano le proprietà e il divenire dei fenomeni reali. Nello stesso tempo, egli capì che non erano gli enti geometrici più perfetti e neanche i più atti a spiegare i segreti del comportamento dei corpi naturali e celesti: infatti, sia la classe delle ellissoidi (analoghi tridimensionali delle ellissi), forme geometriche che si ottengono a partire da una deformazione continua della sfera, che quella dei poliedri (convessi) regolari contengono un più gran numero di simmetrie, e pertanto consentono determinate trasformazioni impossibili da effettuare con il cerchio e la sfera. Poiché sono ricchi in simmetrie e suscettibili di una molteplicità di trasformazioni che lasciano invariate le proprietà essenziali dei corpi celesti, questi solidi geometrici fungono, secondo il matematico e astronomo tedesco, da modello per spiegare le leggi del sistema solare. Keplero andò ben oltre Platone nel suo studio della natura e del ruolo delle simmetrie, e riuscì a fare quello che né Copernico né Galilei osarono fare. Solo contro tutti, egli oserà nell'*Astronomia nova* (1609) prima rinunciare al centro dei cerchi, poi rinunciare all'eccentricità del movimento e al moto uniforme, e infine allo stesso cerchio, mostrando che si possono deformare le orbite circolari in orbite ovali e poi ellittiche, liberandosi così, come dirà nell'*Astronomia nova*, delle «macine dei cerchi».

Quando si parla del ruolo della simmetria nell'astronomia di Keplero si pensa subito ai cinque poliedri regolari. In realtà, il ruolo dei solidi platonici è in Keplero via via sempre più marginale, allusivo e simbolico, limitato alla determinazione del numero dei pianeti, mentre altre simmetrie, basate sugli accordi armonici e rivelatrici di forme naturali più complesse, acquisteranno sempre più il ruolo di struttura portante del cosmo e della natura[3]. Alla fine della sua fatica Keplero penserà di aver trovato, tramite una struttura astratta o forma ideale di natura matematica, il modo di tenere insieme numero di pianeti, distanze dei pianeti dal sole, periodi di rivoluzione, densità e masse dei pianeti, dimen-

3 Cfr. Luciano Boi, *Symmetry and Symmetry Breaking in Physics: From Geometry to Topology*, in «Symmetry», 13 (2021), pp. 2100-2120.

sioni del cosmo… e persino teologia, anima e forma di governo. Nella *Dissertatio cum Nuncio Sidereo*, pubblicata nel 1610, subito dopo aver letto il *Sidereus Nuncius* di Galileo, Keplero espone i motivi del suo interesse particolare per la geometria e per i poliedri regolari. Nella geometria, dopo la sfera, vi è una famiglia di figure che è la più perfetta di tutte, quelle dei cinque solidi euclidei. Questo nostro mondo planetario sarebbe disposto appunto secondo le regole e le proprietà di questi solidi. Keplero è alla ricerca della costituzione del cosmo e la via per arrivare a spiegarla sta nelle costruzioni che rispondono a certe simmetrie. La chiave non sta nei numeri ma nella geometria, non tanto nella semplice misura quanto nella forma del movimento. Mentre per Galilei le orbite ellittiche rompono la simmetria del cosmo, per Keplero sono la strada verso la scoperta di simmetrie 'nascoste' più profonde, consistenti in rapporti e proporzioni tutte generate dal rapporto di quinta armonica 3/2. Anche quando Keplero cercò, nella *Strena seu de nive sexangula* (1611), la causa della simmetria sexangula della neve non si diresse verso la struttura atomica ma verso motivi formali di efficienza superficie-volume. Grazie a queste sue intuizioni, Keplero può essere considerato in qualche modo il precursore delle idee che condurranno Eulero e Lagrange a elaborare la teoria delle superfici minime e il calcolo delle variazioni. Sono motivi formali – cioè attinenti alle proprietà intrinseche e globali delle forme – che fanno sì che l'uomo e il mondo risuonino allo stesso modo. La proporzione nelle distanze e nella velocità dei pianeti è tale da essere riconosciuta dalla mente umana che porta in sé come archetipi tali proporzioni. Per Keplero, le orbite ellittiche sono il risultato della necessità fisica e delle leggi matematiche dell'armonia. Volendo costruire il mondo secondo le leggi dell'armonia non bastano i solidi regolari, che darebbero orbite circolari concentriche e velocità costanti; le proporzioni armoniche costringono il creatore a far variare le velocità dei pianeti. E poiché occorre rispettare la necessità materiale, le ragioni della *vis*, la legge di variazione della velocità deve seguire la «legge della bilancia» e questa impone orbite circolari o ellittiche. Sono dunque escluse le orbite circolari eccentriche e i dati astronomici non consentono orbite circolari centrate sul sole. In sintesi: (1) dati astronomici + (2) armonia + (3) necessità fisica di orbite ellittiche.

3. Simmetrie, invarianze e leggi fisiche

Oggi sappiamo che quelle che credevamo essere le leggi della natura, assolutamente certe e perennemente valide, rappresentano soprattutto (anche se non solo) le relazioni tra i fenomeni che abbiamo indagato, e che la loro validità è limitata alla precisione con la quale abbiamo osservato i fenomeni stessi. All'aumentare della potenza dei nostri metodi d'indagine e all'estensione delle osservazioni a domini prima inaccessibili, le leggi che avevamo credute eterne e universali si dimostrano essere solo approssimazioni di leggi più generali (…). Non leggi della natura, dunque, ma leggi valide per quel modello di natura che ci siamo fatti sulla base delle nostre limitate conoscenze. Così all'inizio del nostro secolo il "libro" di cui parlava Galileo nel *Saggiatore* non ci appare più come libro della natura, ma come libro dei modelli della natura che via via ci facciamo sulla base delle nostre osservazioni e descrizioni fenomenologiche.

La nostra conoscenza della natura si esprime in relazioni matematiche. La cosa straordinaria è che quando nuovi fenomeni ci costringono ad abbandonare un modello per sostituirlo con un altro più generale, quest'ultimo si rivela più bello, cioè matematicamente più strutturato e più simmetrico, quasi che la ricerca della bellezza matematica coincidesse con la ricerca della verità. In altre parole, la bellezza come criterio estetico è un elemento intrinseco importante dell'indagine della natura e della conoscenza delle cause dei suoi fenomeni; la bellezza ha quindi valore estetico, euristico ed epistemico fondamentale[4].

Il modello di indagine seguito da Galileo era fondato sull'unione dell'osservazione dei fenomeni e della generalizzazione astratta, ovverosia, tra pratica sperimentale e ricerca di leggi generali. La matematica è il linguaggio nel quale il libro della natura è scritto. Aver capito che essa è la chiave per intendere la natura, almeno la natura dei fisici,

4 Per considerazioni approfondite su questo tema, cfr. Luciano Boi, *Some Mathematical, Epistemological, and Historical Reflections on the Relationship Between Geometry and Reality, Space–Time Theory and the Geometrization of Theoretical Physics, from Riemann to Weyl and Beyond*, in «Foundations of Science» 24 (1), 2019, pp. 1-38.

è stata probabilmente l'idea più originale di Galileo: da una parte l'osservazione accurata dei fenomeni, sapientemente spogliati dei dettagli contingenti, ha suggerito nuove idee alla matematica (il calcolo differenziale è nato così), dall'altro teorie elaborate per puro interesse intellettuale dai matematici si sono dimostrate profondamente feconde per interpretare fenomeni ignoti al tempo in cui tali teorie sono state inventate.

Molto significativa per le applicazioni fisiche fu la generalizzazione del concetto di spazio operata grazie alla scoperta delle geometrie non euclidee, alla geometria intrinseca delle superfici curve e alla teoria delle varietà differenziabili elaborate, rispettivamente, da Gauss e Riemann[5]. Il concetto di spazio, liberato dalla rigida cornice euclidea basata in parte sulla percezione visiva e tattile, fu esteso al di là delle tre dimensioni tradizionali, a un numero arbitrario, anche infinito di esse. La geometria entrò nell'Ottocento in un periodo – che dura tutt'ora – di straordinaria creatività inventando strutture matematiche nuove di cui quelle note alla geometria euclidea sono solo casi particolari.

Un esempio della potenza dell'astrazione matematica è il passaggio dall'idea vaga di simmetria al concetto matematico di gruppo che secondo Hermann Weyl[6] è il più originale fra quelli introdotti e sviluppati dalla matematica dell'Ottocento. Quella di simmetria è una delle idee guida della scienza, la quale mira a spiegare i fenomeni conformemente a leggi, cioè a regolarità, all'invarianza nel cambiamento. Nell'idea di simmetria sono presenti due elementi: da un lato l'oggetto che è simmetrico (che presenta certe regolarità), il cerchio o il quadrato per esempio, dall'altro le operazioni (o trasformazioni) che possiamo fare sull'oggetto lasciandolo immutato; per esempio una qualunque rotazione del cerchio attorno a un asse passante per il centro e perpendi-

5 Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones circa superficias curvas*, Göttingen 1827, in *Werke*, vol. iv, Göttingen, 1873. Georg Friedrich Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsarbeit*, 1854, in *Bernhard Riemann Gesammelte Mathematische*, nuova edizione, Springer-Verlag, 1990, pp. 304-319.

6 Hermann Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

colare al piano del cerchio o, nel caso del quadrato, le rotazioni di 90°, 180°, 270° e 360° gradi.

In un linguaggio un po' più preciso parliamo di un insieme I i cui elementi designeremo con E_1, E_2, E_3,..., E_n (I per esempio il cerchio, gli elementi E_1, E_2, E_3,...,E_n i punti del cerchio) e di un gruppo G di trasformazioni che chiameremo g_1, g_2, g_3,..., g_i che agiscono su I nella maniera seguente: la trasformazione g_i applicata all'elemento E_j lo manda nell'elemento E_k di I, cioè $g_i\, E_j = E_k$.

Concisamente diremo che l'insieme I è simmetrico o invariante rispetto a G se una qualunque trasformazione di G manda un elemento di I in un elemento di I. Sia l'insieme I che il gruppo G possono avere un numero infinito di elementi: negli esempi che ho citato sia i punti del cerchio che quelli del quadrato sono infiniti, le rotazioni di G che lasciano invariato il cerchio sono infinite, quelle che lasciano invariato il quadrato sono invece in numero finito, cioè formano un gruppo finito. Nel primo caso abbiamo un gruppo continuo; nel secondo, un gruppo discreto.

Un gruppo si dice *continuo* se ha un numero infinito di elementi, e *discreto* se contiene un numero finito di elementi. I gruppi continui sono molto importanti sia in matematica che in fisica perché collegano profondamente il mondo dei "concetti" matematici agli "oggetti" del mondo fisico tramite le operazioni di trasformazione, cambiamento e invarianza. Possiamo definirli come quei gruppi in cui l'insieme degli elementi, oltre ad avere una struttura di gruppo (vale a dire che gode delle proprietà dell'*associatività*, dell'*esistenza dell'elemento neutro* e dell'*esistenza dell'inverso*; ricordiamo che un gruppo si dice *abeliano* se tutti i suoi elementi commutano, e *non abeliano* se non commutano), è anche uno spazio topologico con topologia compatibile con l'operazione de gruppo.

Fra i gruppi continui, i gruppi di Lie assumono particolare rilevanza in fisica. Si tratta di gruppi topologici in cui l'insieme di punti, oltre ad essere uno spazio topologico, formano una varietà differenziabile. Un gruppo possiamo pensarlo localmente isomorfo a R^n. Citiamo alcuni dei gruppi più importanti. Il gruppo delle rotazioni nel piano R^2: l'elemento del gruppo prende il nome di $SO(2)$ (gruppo delle matrici

2×2 ortogonali con determinante 1); il gruppo è unidimensionale (cioè dipende da un solo parametro reale, l'angolo di rotazione θ di un vettore (x, y)) ed è abeliano; è importante notare che l'elemento θ è equivalente all'elemento $\theta + 2\pi$ e ciò rende il gruppo compatto in quanto equivalente, come varietà, ad un cerchio. Nello spazio bidimensionale complesso, il piano complesso di Gauss di equazione $u = x + iy$, si ha il gruppo $U(1)$ la cui rotazione è rappresentata dalla "matrice unidimensionale" $U(\theta) = e^{i\theta}$, che è una fase. È importante osservare che le matrici dei due gruppi precedenti soddisfano le stesse proprietà, quindi coincidono, o, in termini matematici, sono *isomorfi* $SO(2) \sim U(1)$. Essi godono inoltre della seguente importante proprietà: l'azione del gruppo può essere ottenuta come composizione di un numero molto grande di trasformazioni "infinitesime" successive. Due altri gruppi importanti sono legati al momento angolare in Meccanica Quantistica. Si tratta del gruppo delle rotazioni in R^3, $SO(3)$, e del gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie con determinante 1. Un gruppo topologico si dice *compatto* se è munito di una struttura di varietà topologica compatta, compatibile con la struttura algebrica, le cui operazioni di gruppo che agiscono sulla varietà sono funzioni continue. I gruppi di simmetrie di *gauge* sono: il gruppo $U(1)$ per l'elettrodinamica quantistica, il gruppo $SU(2) \times U(1)$ per le interazioni elettrodeboli e il gruppo $SU(3)$ per la cromodinamica quantistica. I gruppi di Lie sono gruppi topologici localmente compatti. Un teorema importante ci dice che *se G è un gruppo topologico compatto, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:* (a) *G non ha sottogruppi piccoli*; (b) *G è un sottogruppo chiuso di* $O(n)$ *per qualche* $n>0$; (c) *G è un gruppo di Lie*.

Un gruppo euclideo si compone di rotazioni e traslazioni. Una *rotazione* è un'isometria, cioè una trasformazione geometrica che sposta gli elementi in modo rigido lasciando inalterate le distanze. Ogni rotazione del piano è definita da un punto O, detto centro di rotazione, e da un angolo α caratterizzato da un'ampiezza e da un verso, che può essere orario o antiorario. Una *traslazione* è una trasformazione geometrica che conserva la misura delle lunghezze e l'ampiezza degli angoli, due figure ottenute mediante una traslazione sono direttamente congruenti. In fisica: (i) la traslazione corrisponde al seguente fenomeno: tutte le particelle descrivono traiettorie (le rette che uniscono due punti qualsiasi di un corpo rimangono sempre parallele alla direzione iniziale); ii) la rotazione intorno a un asse corrisponde al fatto che tutte le particelle descrivono traiettorie circolari attorno a una retta chiamata asse di rotazione.

Consideriamo ora un esempio più ricco, il piano, che è illimitato. È chiaro che il piano resta invariato (cioè immutato) se applichiamo una traslazione a (ossia spostiamo) ogni punto *P* per un segmento arbitrario *A* e anche se ruotiamo tutto il piano attorno a un asse arbitrario perpendicolare al piano. L'insieme di tutte le traslazioni e di tutte le rotazioni è un gruppo, detto *gruppo euclideo*. Ognuna di queste rotazioni e traslazioni lascia invariata la distanza *d* (*P*, *P*') fra due punti qualunque *P*, *P*' del piano. Una proprietà interessante dei gruppi che appare quando si *compongono* due trasformazioni (o azioni del gruppo): per esempio, se prima effettuiamo una traslazione applicata al punto *O* (l'origine di due rette perpendicolari) e una rotazione intorno a *O* di un angolo di 90°, poi ripetiamo queste stesse operazioni invertendone l'ordine, cioè prima la rotazione poi la traslazione, otteniamo allora un risultato diverso da quello che avevamo ottenuto prima: questa proprietà del gruppo si chiama *non-commutatività*. In altre parole, le rotazioni nel piano (attorno a un asse perpendicolare al piano) e le traslazioni sono due operazioni che non commutano.

4. Gli sviluppi concettuali della fisica nell'Ottocento: Newton, Maxwell, Planck, Einstein

Il quadro concettuale della fisica dell'Ottocento rimane quello definito nei *Principia* di Newton (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1687): lo spazio euclideo assoluto e il tempo, anch'esso assoluto, ambedue dati a priori ma rigorosamente separati, ambedue infiniti, sono la sede dove si svolgono i fenomeni dovuti al moto e alle trasformazioni della materia. Né i fenomeni influenzano la cornice spazio-temporale, né questa reagisce sui fenomeni.

L'elettromagnetismo di Maxwell, come la meccanica classica di Newton, Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace, Hamilton, ecc., sembrava confermare una concezione deterministica dell'evoluzione temporale dei fenomeni: noto lo *stato* di un sistema fisico a un dato istante t_0 e tutte le forze che agiscono su di esso, è possibile determinare lo stato ad ogni istante successivo.

Lo "stato", nel caso di un sistema di particelle in meccanica classica, è definito dalla sua posizione nello spazio (coordinate spaziali) e dalla velocità a un dato istante, ove questa velocità può rimanere costante oppure variare con intervento dell'accelerazione, che rappresenta quindi la derivata seconda rispetto al tempo. Caratteristica della fisica dell'Ottocento è la rappresentazione di tutte le grandezze fisiche con *funzioni reali e continue* delle coordinate spaziali e del tempo, formulazione matematica dell'antica affermazione "*Natura non facit saltus*", le grandezze fisiche possono così essere moltiplicate fra loro e tale prodotto è indipendente dall'ordine dei fattori.

Il primo anno del secolo XX (1901) segnò l'inizio di una nuova concezione della materia. Nel dicembre del 1900 Max Planck presenta all'Accademia delle Scienze di Berlino la sua interpretazione dei risultati sperimentali di Rubens *et* Kulbaum dalla quale emerge che dopo tutto "*Natura facit saltus*". Per un quarto di secolo questo risultato, estraneo all'ortodossia scientifica ottocentesca, turberà i più brillanti ingegni e, quando finalmente verrà interpretato, la fisica non sarà più quella di prima e la natura ci apparirà qualcosa di molto meno meccanico e deterministico di quanto i filosofi dei lumi avevano cercato di far credere.

Qualche anno dopo la scoperta di Planck, si ha una delle tre grandi rivoluzioni scientifiche e concettuali della fisica del Novecento: la scoperta della relatività ristretta ad opera di Albert Einstein nel 1905. Questa teoria sta alla base di gran parte della fisica del Novecento, e soprattutto ha introdotto una concezione dello spazio e del tempo che ha profondamente cambiato la nostra visione della natura.

Facciamo un passo indietro. Qual è l'idea che Galileo aveva dello spazio e del tempo? Nella sua visione, il tempo è assoluto e lo spazio è relativo, la misura dipende dal moto dei sistemi inerziali di riferimento. L'approccio sperimentale di Galileo consiste nello studio dei fenomeni, i quali sono stati pensati per confermare un'ipotesi teorica. Famoso è l'esempio in cui egli enuncia (nel *Dialogo sopra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano*, 1632) il suo *principio della relatività*, vale a dire che i moti dei corpi sono gli stessi sia che ci si trovi in uno stato di quiete sia in moto rettilineo uniforme, quindi le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali. Da ciò si evince che non è possibile stabilire se stiamo fermi o se ci muoviamo di moto rettilineo uniforme, quindi non esiste lo stato di quiete assoluto: tutti gli osservatori hanno pari valore in quanto ognuno può considerare sé stesso come Primo Motore Immobile.

Newton attribuiva allo spazio e al tempo la qualifica di assoluti, cioè li considerava come qualcosa di dato a priori, fissi e immutabili, indipendenti l'uno dall'altro; per ciascuno di essi vale la geometria euclidea, rispettivamente quella dello spazio a tre dimensioni e quella di una retta (a una dimensione). Ambedue sono infiniti: verso il passato e verso il futuro il tempo; a Nord e a Sud, a Est e a Ovest, in alto e in basso, lo spazio. La geometria della retta che rappresenta il tempo resta invariata se spostiamo l'origine del tempo. Diciamo che nulla cambia se a ogni tempo t, aggiungiamo o togliamo un qualunque tempo fisso. In linguaggio preciso diciamo che la fisica è invariante rispetto alle traslazioni temporali (cioè non cambia se cambiamo l'origine del tempo).

Per individuare un punto nello spazio occorre fissare *un punto di riferimento S*, cioè dare un punto O e tre rette perpendicolari fra loro nascenti da O: per esempio, O può essere lo spigolo di una stanza e le tre rette quelle definite dall'intersezione di due pareti e di ciascuna di queste con il pavimento. Fissato il riferimento S, ogni punto dello spazio è individuato da tre numeri (x^1, x^2, x^3), che rappresentano le distanze, con segni opportuni, dai tre piani definiti da S: le due pareti e il pavimento. Naturalmente invece di S, possiamo prendere un altro riferimento S' la cui origine è un altro punto O' ottenuto da O con una traslazione e le cui rette perpendicolari sono ruotate rispetto a quelle che definivano il riferimento S. Nel riferimento S' il punto P è individuato da tre numeri diversi dai precedenti, chiamiamoli (X^1, X^2, X^3). Come sappiamo, le proposizioni della geometria euclidea sono invarianti rispetto alle trasformazioni (traslazioni e rotazioni del gruppo euclideo). Ciò significa che esse mantengono la stessa forma sia che le esprimiamo usando le coordinate (x^1, x^2, x^3) del sistema S sia che le esprimiamo usando quelle (X^1, X^2, X^3) del sistema S'.

Siamo abituati a pensare lo spazio e il tempo come due concetti assolutamente distinti, ma se esaminiamo la cosa attentamente ci rendiamo conto che è difficile pensare all'uno senza l'altro. Minkowski ha giustamente osservato che nessuno ha mai visto un posto se non a un certo tempo, né ha vissuto un istante se non in un dato posto. A questa unione di spazio e tempo si dà il nome di *evento*, caratterizzato da quattro numeri (x^1, x^2, x^3, t): i primi tre precisano, rispetto a un dato sistema di riferimento, la posizione nello spazio, e il quarto, t, l'istante corrispondente rispetto a una data origine del tempo. L'insieme di tutti gli eventi si chiama spazio-tempo ed è chiaramente uno spazio a 4 dimensioni.

Il primo a porsi il problema di quali movimenti relativi di due sistemi di riferimento fossero compatibili con le osservazioni fu Galileo, e la soluzione che ne diede è contenuta nel principio che oggi chiamiamo *relatività galileiana*, la quale era basata sull'osservazione di fenomeni meccanici. Secondo tale principio, verificato la prima volta sperimentalmente da P. Gassendi nel 1640, non è possibile decidere con esperimenti meccanici se il nostro sistema di riferimento sia in quiete o si muova di moto rettilineo uniforme. L'unica cosa che ha senso è il moto relativo di due oggetti, non quello assoluto di un solo oggetto.

Gassendi fece l'esperienza suggerita da Galileo di lasciar cadere una pietra dall'albero di una nave che si muoveva con velocità uniforme rispetto alla riva in un mare calmo: la pietra cadde, come aveva predetto Galileo, ai piedi dell'albero, come se la nave fosse ferma. Se ne conclude che è impossibile distinguere con esperienze meccaniche lo stato di quiete da uno stato di moto rettilineo uniforme. Naturalmente il moto deve essere rettilineo e uniforme: un moto accelerato è facilmente avvertibile non foss'altro per gli effetti che esso provoca in ognuno di noi.

Tradotto in un linguaggio preciso questo significa che il principio di relatività impone che le rotazioni (che nel caso della nave corrispondono al rullio e al beccheggio) devono essere indipendenti dal tempo, mentre le traslazioni devono dipendere linearmente dal tempo (cioè essere proporzionali al tempo).

Esplicitamente il principio di relatività galileiana significa che le coordinate (x^1, x^2, x^3, t) e le coordinate $(x^1 - v^1t, x^2 - \mathrm{v}^2t, x^3 - v^3t, t + a^\circ)$ dello stesso evento in due sistemi che si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità $v = (v^1, v^2, v^3)$ sono perfettamente equivalenti. Le trasformazioni che fanno passare da x^1 a $x^1 - v^1t$, ecc. formano un gruppo che si chiama *gruppo di Galileo*, anche se Galileo non lo disse mai perché non conosceva il concetto di gruppo.

La meccanica newtoniana è determinata dalla richiesta che le sue equazioni siano invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo, allo stesso modo come, secondo Felix Klein (il matematico tedesco autore del ben noto Programma d'Erlangen, 1872), la geometria euclidea è determinata dalla richiesta che le sue proposizioni siano invarianti rispetto al gruppo euclideo.

Il gruppo di Galileo determina la struttura dello spazio-tempo (l'ambiente della fisica), la quale oltre che a risultare tutt'altro che intuitiva è, dal punto di vista matematico, assai poco elegante. Ciò deriva dal fatto che lo spazio e il tempo sono trattati in maniera asimmetrica nella meccanica classica, nella quale spazio e tempo hanno un ruolo molto diverso. Lo spazio della fisica classica, matematicamente parlando, è uno "spazio fibrato" la cui base è la retta del tempo e le cui fibre sono spazi euclidei tridimensionali.

Uno *spazio fibrato* è un concetto chiave della matematica del XX° secolo. Va innanzitutto chiarito che l'idea di fibrato consiste nell'associare a ogni punto di una varietà uno spazio vettoriale della stessa dimensione della varietà: quest'oggetto si chiama *spazio tangente*. L'unione disgiunta degli spazi tangenti, detta *fibrato tangente* alla varietà, ha a sua volta una struttura naturale di varietà, di dimensione pari al doppio di quella della varietà di partenza. Il fibrato tangente è il primo esempio di una classe molto importante di varietà, i fibrati vettoriali, che possono essere descritti, in termini generali, come unione disgiunta di spazi vettoriali associati in modo differenziabile ai punti di una varietà di base. La definizione formale dei fibrati vettoriali comprende lo studio delle *sezioni* dei fibrati vettoriali, cioè le applicazioni differenziabili che associano a ciascun punto della varietà base un vettore nel corrispondente spazio vettoriale. Le sezioni del fibrato tangente sono i *campi vettoriali*. In questo modo il fibrato diventa un oggetto dinamico. Infatti, dare un campo vettoriale è come assegnare in maniera differenziabile un vettore velocità a ciascun punto della varietà base; un punto della varietà che si muove seguendo questa velocità percorre una curva detta *curva integrale* del campo vettoriale. Seguendo le curve integrali per un tempo prefissato si ottiene un'applicazione differenziabile da un aperto della varietà a valori nella varietà stessa, detta *flusso* del campo vettoriale. In termini generali, la definizione formale è la seguente: una funzione continua $p : E \to B$ è un fibrato con spazio totale E, spazio di base B e spazio fibra F se esiste un ricoprimento aperto $\{U\}$ di B, e per ogni $U \in \{U\}$un omeomorfismo $\phi_U : U \times F \to p^{-1}(U)$ con $p_\circ\phi_U(x, y) = x$ per $x \in U$ e $y \in F$; per ogni $b \in B$, $p^{-1}(b)$, che è omeomorfa a F, si definisce la fibra sopra b. Il fibrato $\zeta = (E, B, F, p)$ viene inoltre fornito di un gruppo strutturale G, che agisce su E e su F. Si tratta di una struttura molto ricca e, in particolare, se lo spazio di base B soddisfa a particolari condizioni, la proiezione p del fibrato è una *fibrazione*. Il concetto di fibrato ha avuto un'ampia diffusione in molti settori della matematica e della fisica. È di particolare interesse il fatto che ogni moderna teoria di *gauge* si basa sullo studio di un fibrato vettoriale, mentre la struttura globale dei fibrati permette la formalizzazione del concetto di *istantone* e della carica topologica; inoltre, lo studio di grandezze gauge-invarianti ha portato alla classificazione degli spazi fibrati mediante le classi di Chern (classi di coomologia definite su un fibrato vettoriale complesso n-dimensionale) su un fibrato complesso.

5. La relatività speciale (o ristretta) di Einstein

La teoria dell'elettromagnetismo, formulata da Maxwell nel suo *A treatise on electricity and magnetism* (1873) suggerì a Einstein nel 1905 la prima profonda revisione del modello newtoniano dello spazio-tempo. Nelle equazioni di Maxwell compare una velocità c che l'esperienza dimostra essere uguale alla velocità della luce nel vuoto, $c = 3 \times 10^8\ m/s$. Fu questa coincidenza, a priori inaspettata, a permettere di includere l'ottica tra i fenomeni elettromagnetici e a fornire così la più esplicita conferma della teoria di Mawxell. Come dimostrò una celebre esperienza compiuta da Michelson nel 1879 e in seguito perfezionata nel 1904, la velocità della luce emessa da una sorgente in moto con velocità v è indipendente da v. La velocità della luce appare dunque come la velocità massima con cui si propaga un segnale. Nello spazio-tempo newtoniano una tale velocità non trova posto, perché in esso non esiste alcun limite superiore alla velocità.

Il problema che si presentò ad Einstein era dunque quello di riconciliare il *principio di relatività*, l'impossibilità cioè di rivelare un moto rettilineo uniforme che l'esperimento di Michelson dimostra esser valido per tutta la fisica e non solo per la meccanica – con la costanza della velocità della luce, cioè con la violazione dell'invarianza rispetto alle trasformazioni di Galileo che non ammettono nessuna velocità massima. È chiaro anche che l'esistenza di una velocità massima con cui si possono trasmettere segnali è inconciliabile con lo schema spazio-temporale newtoniano che ammette la possibilità di definire la contemporaneità di eventi separati da qualunque distanza spaziale anche infinita. Le modificazioni *del concetto di contemporaneità* rappresenta l'essenza della relatività einsteiniana e della nuova concezione dello spazio-tempo.

Si deve comunque a Poincaré la formulazione precisa del gruppo di trasformazioni che lasciano invarianti le equazioni di Maxwell (in una memoria apparsa nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1897). Sono trasformazioni lineari (ciò dipendenti solo dalla prima potenza delle coordinate (x^1, x^2, x^3, t) e le coordinate (X^1, X^2, X^3, T)) dello stesso evento in due diversi sistemi di riferimento in moto relativo con velocità v; le trasformazioni dipendono dal rapporto (v/c^2) e sono tali che nel limite in cui c tende all'infinito si riducono a quelle di Galileo.

La geometria dello spazio-tempo della relatività speciale è quindi diversa da quella immaginata da Newton ed è matematicamente più elegante e concettualmente più soddisfacente di quest'ultima. Infatti l'esistenza di una velocità privilegiata c permette di trattare spazio e tempo sullo stesso piano, associando a un tempo t una distanza $x^4 = ct$. Perciò tempo e spazio non sono più grandezze distinte e incommensurabili come per Newton: conoscendo *c* ci basta un solo strumento per misurare entrambe.

È quello che facciamo quando parliamo di anno-luce, cioè la distanza che la luce percorre in un anno = $c \times 1$ anno = 3×10^8 $(m/s) \times 3 \times 10^7 s$ = 9.3×10^{15} m). Lo spazio-tempo diventa così molto più simile allo spazio tridimensionale in cui viviamo, cioè diventa, matematicamente parlando, uno *spazio vettoriale*, i cui punti sono eventi che avvengono nello spazio-tempo.

Molto simile ma non analogo, perché la geometria dello spazio-tempo non è uguale a quella dello spazio euclideo tridimensionale. In quest'ultimo qualunque rotazione o traslazione facciate, il quadrato l^2 della distanza tra due punti resta invariato. La geometria dello spazio-tempo invece è determinata dal gruppo di Poincaré per il quale la distanza spaziale l^2 per due eventi e l'intervallo di tempo che li separa non sono singolarmente invarianti come avveniva per lo spazio-tempo della meccanica newtoniana: solo la combinazione di spazio e tempo data da $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$ rimane invariata (si noti che $l^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3))^2$. Spazio e tempo risultano così intimamente connessi seppur in maniera non del tutto simmetrica a causa del segno – davanti a $(x^4)^2$; la combinazione $s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$ non è quadratica, cioè non è il quadrato delle distanze del punto O di coordinate (0, 0, 0, 0) dal punto P di (x^1, x^2, x^3, x^4), perché i quadrati delle distanze sono per definizione positivi o nulli solo quando i due punti coincidono.

6. La relatività generale e l'interazione tra geometria (curvatura) e fisica (materia)

Lo spazio della relatività speciale, pur essendo con le sue quattro dimensioni abbastanza lontano dall'intuizione comune, ha tuttavia una struttura geometrica (relativamente) semplice. Esso condivide alcune delle sue proprietà con il piano e lo spazio euclideo, ad esempio il fatto che sia illimitato e infinito. Noi sappiamo però che ci sono delle superfici e degli spazi che sono illimitati e pur finiti, per esempio la sfera e gli ellipsoidi, sui quali la geometria d'Euclide non è più valida (o è valida solo localmente, cioè in porzioni infinitesimamente piccole della superficie). In particolare queste superfici e questi spazi sono curvi e non piatti. Perché non pensare allora che lo spazio-tempo sia anch'esso uno spazio-tempo curvo e limitato? Uno spazio-tempo infinito e illimitato come quello della relatività speciale, implica quasi necessariamente un universo anch'esso infinito e illimitato nello spazio e nel tempo, ed è proprio questa concezione cosmologica che ha dominato il pensiero scientifico e filosofico dal Seicento fino quasi agli anni trenta del secolo scorso.

La considerazione e lo studio degli spazi curvi ha costituito un elemento di profondo cambiamento concettuale nella matematica e nella fisica che ha trasformato in particolare il modo di concepire i rapporti tra geometria e fisica.

Abbiamo visto che l'invarianza dei fenomeni elettromagnetici rispetto al gruppo di Poincaré ha un'evidenza sperimentale e che questa invarianza è a favore di una fisica ambientata in uno spazio-tempo piatto, infinito e illimitato. Ma questo modello di spazio-tempo non è concettualmente soddisfacente. Infatti, mentre sia la relatività galileiana che quella speciale di Einstein ci hanno insegnato l'impossibilità di rivelare una velocità uniforme assoluta (solo quella relativa ha senso) i moti rotatori (o più generalmente accelerati) danno luogo a fenomeni rivelabili, per esempio quelli dovuti alle forze centrifughe (in particolare la forza apparente d'inerzia in un sistema di riferimento in moto circolare). Per Newton le rotazioni andavano considerate unicamente rispetto allo spazio assoluto, cioè a un sistema di riferimento privilegiato. Per Newton è dunque nello spazio che va ricercata l'origine delle forze centrifughe e di altre simili. Ma se lo spazio dà origine a forze che agiscono sulla materia mentre quest'ultima non reagisce in alcun modo sullo spazio, si ha fra spazio e materia una relazione asimmetrica assai poco intelligibile.

La svolta avviene con Gauss e soprattutto con Riemann, il quale nel 1854 (nel suo scritto di Abilitazione) aveva osservato che questa asimmetria fra spazio dato a priori, che agisce sulla materia, e la materia che occupa lo spazio lasciandolo immutato è concettualmente insoddisfacente: non ha senso infatti parlare di proprietà dello spazio senza tener conto della materia, né del moto di questa senza considerare la struttura geometrica dello spazio.

Del resto senza materia non è possibile conoscere la struttura dello spazio, non foss'altro perché senza materia non esisterebbero strumenti (i corpi rigidi e i metri campione di cui parla prima Helmholtz e poi Einstein) per misurare lunghezze e intervalli di tempo e cioè per determinare la struttura metrica (locale) dello spazio-tempo. È più logico pensare che sia la distribuzione della materia a determinare la geometria dello spazio-tempo e che questa a sua volta prescriva l'evoluzione dei fenomeni fisici e in particolare le leggi del moto. Ciò vuol dire superare lo schema concettuale che aveva determinato tutta la fisica da Galileo e Newton in poi: uno spazio-tempo rigidamente fissato a priori, nel quale si svolgono i fenomeni dovuti alla materia, quasi come una storia che si svolge in una scena immutabile. In luogo di questo schema, Riemann propone una concezione più profonda e più complessa nella quale materia e spazio-tempo (fenomeni fisici e strutture geometriche) siano inseparabilmente congiunti e dinamicamente interdipendenti: l'una, la materia, determina la struttura geometrica dello spazio-tempo, e questa a sua volta determina le leggi del moto della prima.

Per la sua teoria della relatività generale Einstein considera non solo sistemi di riferimento in moto relativo uniforme, ma anche sistemi in moto accelerato. Il moto uniformemente accelerato vale per ogni corpo, indipendentemente dalla sua massa e dalla sua composizione, il che vuol dire che l'accelerazione che subisce un corpo dipende solo dal campo gravitazionale, cioè dalla forza per unità massa. Tale campo può annullarsi se si usa un sistema di riferimento fisso in caduta libera. Einstein ebbe la grande intuizione fisica che la peculiarità della gravitazione (della forza gravitazionale) è l'uguaglianza fra massa inerziale (il coefficiente che moltiplica l'accelerazione) e massa gravitazionale (il coefficiente che moltiplica il campo gravitazionale).

L'eliminazione del campo gravitazionale con l'uso di un sistema di coordinate in caduta libera non può ottenersi globalmente su tutto lo spazio-tempo, a meno che il campo gravitazionale non sia costante. Se invece esso varia da punto a punto occorre, per eliminarlo, in ogni punto, un diverso sistema di coordinate (sistema di riferimento). Si è così condotti a considerare trasformazioni di coordinate generali (invertibili) che dipendono in maniera continua e differenziabile dal punto, trasformazioni dunque molto più generali di quelle di Poincaré che caratterizzano la geometria della relatività speciale. Queste nuove trasformazioni sono quelle della geometria riemanniana che valgono per ogni spazio curvo a n dimensioni ($n > 3$) dotato di una metrica che varia localmente in ognuno dei suoi punti.

In altre parole, quello che ora è richiesto rispetto alle trasformazioni di Poincaré per la relatività speciale è soltanto che tale geometria (riemanniana) valga in un intorno piccolo di ciascun punto (cioè localmente) dello spazio-tempo, ma non globalmente. La situazione è simile a quella che si ha su una superficie curva bidimensionale, la Terra per esempio, la cui geometria, in un intorno piccolo di ogni suo punto, può essere approssimata dal piano tangente a tal punto, la quale però non vale globalmente sulla superficie.

Similmente la teoria della relatività generale richiede che le leggi della fisica siano invarianti rispetto a trasformazioni generali delle coordinate locali (cioè in ogni punto) dello spazio-tempo. Ciò significa ammettere che la struttura dello spazio-tempo sia meno rigida di quella che avevamo supposto sin qui e sia invece quella di uno spazio curvo la cui curvatura sia determinata dall'effetto gravitazionale della materia e a sua volta influenzi la distribuzione della materia nell'universo.

La relatività generale è la prima teoria fisica in cui la struttura dello spazio-tempo non è data a priori ma va determinata risolvendo un sistema di equazioni assai complicate, dette *equazioni di Einstein*, che contengono come incognite le grandezze che determinano la geometria dello spazio-tempo e la sorgente del campo gravitazionale. Secondo la teoria della relatività generale, le proprietà geometriche dello spazio-tempo, quali la distanza fra due eventi infinitamente vicini, la curvatura, ecc., variano in genere da punto a punto, come avviene in generale sulle superfici curve. Tali proprietà sono la manifestazione geometrica del campo gravitazionale dovuto alla materia: per esempio, la generalizzazione del potenziale gravitazionale di Newton è legata alla distanza fra punti infinitamente vicini, e le forze gravitazionali di marea (cioè la variazione del campo gravitazionale per unità di distanza) sono legate alla curvatura dello spazio-tempo. Precisamente, le equazioni di Einstein sono equazioni alle derivate parziali non lineari che legano le componenti del tensore metrico g_{ij} e le loro derivate prime e seconde alle componenti del tensore energia-impulsione T_{ij} della materia.

Due concetti matematici fondamentali per capire la relatività generale sono quelli di "trasporto parallelo" e di "connessione". In termini intuitivi, il concetto di *trasporto parallelo* si può descrivere come segue. Immaginiamo di spostare un vettore lungo un cammino chiuso formato di archi di geodetiche, sotto la condizione che rimanga fisso l'angolo tra il vettore e la geodetica lungo la quale si muove. Se si esegue l'operazione su di un piano, il vettore ritorna puntato lungo la direzione di partenza, ma in uno spazio curvo si ottiene un risultato ben diverso. Sulla Terra esiste, per esempio, un ottante (triangolo geodetico equilatero) avente come vertici il Polo Nord, Quito, capitale dell'Equador, e Libreville, nello Zaire, e avente come lati l'arco di meridiano Polo Nord-Quito, l'arco di equatore Quito-Libreville e infine l'arco di meridiano Libreville-Polo Nord. Gli angoli interni dell'ottante valgono $\pi/2$. La formula qui sopra si scrive allora come: $\alpha + ß + \gamma - \pi = \pi/2 = Area/R^2$. L'area dell'ottante vale quindi $\pi R^2/2$, ossia l'ottava parte dell'area terrestre $4\pi R^2$. Partiamo ora dal Polo Nord con il vettore, usando la convenzione di Levi-Civita; ritorneremo al Polo Nord con il vettore ruotato di $\pi/2$. Il risultato ha validità universale: il vettore che fa il giro di un triangolo geodetico torna ruotato dell'angolo *Area* × *Curvatura*, ossia di un certo difetto angolare ε; in altri termini, il cammino non è un invariante conforme. Il vantaggio della nozione di Levi-Civita sta nella sua validità per cammini chiusi che non sono triangoli e che non sono neppure composti da archi di geodetiche. Infine essa permette un'immediata applicazione a spazi di dimensione qualsiasi, per cui l'uso del triangolo appare assolutamente inadeguato. Cammini chiusi che possono deformarsi l'uno nell'altro senza incontrare zone in cui esiste curvatura sono equivalenti agli effetti del trasporto parallelo.

La *connessione* è un oggetto geometrico tra i più importanti dell'analisi tensoriale; esso fornisce un metodo per valutare la velocità con cui i vettori e i tensori variano in modo infinitesimale su una varietà riemanniana. L'operatore ∇ dato da $\nabla du^j = \Gamma^k_{ij}\, du^j du^k$ (dove Γ^k_{ij} definiscono i simboli di Christoffel, con indici che possono variare da 1 a *n*) prende il nome di *connessione di Levi-Civita*. Esso viene usato per introdurre la nozione di parallelismo, che permette di stabilire quando un tensore è costante lungo una curva negli spazi curvi e *n*-dimensionali considerati da Riemann. La struttura indotta dal prodotto scalare canonico (o *forma bilineare simmetrica*) è un esempio di *metrica riemanniana* su una varietà, mentre la derivazione di un campo vettoriale (più in generale, la *derivata covariante*) nella direzione data da un altro è un esempio di *connessione*. Una metrica riemanniana permette di misurare la lunghezza di vettori tangenti, la lunghezza di curve e di introdurre la distanza fra due punti; una connessione permette di derivare campi vettoriali, e in particolare di dare una nozione di campi costanti lungo curve (chiamati *campi paralleli*). Va sottolineato che su ogni varietà si possono definire infinite connessioni e infinite metriche riemanniane.

Notiamo, a questo proposito, che nel 1918 Hermann Weyl sviluppò la geometria differenziale affine, basata esclusivamente sulla nozione di parallelismo e non sulla metrica riemanniana; assumendo il punto di vista della teoria degli invarianti, egli creò nel 1921 la teoria delle connessioni proiettive e conformi; in una serie di lavori pubblicati tra il 1923 e il 1925, Elie Cartan sviluppò anche la teoria delle connessioni affini, proiettive e conformi secondo il punto di vista del Programma di Erlangen di Felix Klein, cioè facendo agire un determinato gruppo, un gruppo di Lie, sulla varietà; l'associazione dei gruppi di Lie semplici e la geometria differenziale delle varietà differenziabili culminò nella sua scoperta degli spazi riemanniani simmetrici, i quali offrono una naturale generalizzazione della superficie sferica nello spazio euclideo e del disco unitario nel piano complesso con la metrica non euclidea di Poincaré.

È importante peraltro sottolineare che l'esistenza di una metrica riemanniana o di una connessione con determinate proprietà (in particolare riguardanti la curvatura) può avere delle conseguenze sulla topologia della varietà; in altri termini, ci può essere una relazione diretta tra la curvatura e la topologia globale di una varietà, dotata di una metrica riemanniana. Per esempio, la curvatura positiva determina la topologia, cioè la forma e le proprietà globali, di certe varietà riemanniane. Si tratta del problema più generale del rapporto tra proprietà locali e proprietà globali. Sappiamo che la curvatura di una curva o di una superficie si può determinare esaminando soltanto una piccola regione intorno a un punto, ma è chiaro che questa nozione di tipo locale può influire sull'andamento della curva o della superficie nella loro globalità. Per esempio, proprio la curvatura della sfera è responsabile della sua chiusura su se stessa e quindi del fatto che la sua area sia finita. Anche la teoria delle geodetiche mette in risalto la differenza tra locale e globale. In una regione sufficientemente piccola di una superficie, la geodetica tra due punti è l'unica curva che individua il percorso di minima distanza da un punto all'altro; dal punto di vista analitico, si tratta della traiettoria di una particella le cui coordinate $u^i(t)$ verificano le seguenti equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, $\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij} u^i u^j = 0$ $(k = 1, 2)$, dove i punti sopra le lettere indicano le derivate rispetto a t. Invece, se la regione considerata si aggrandisce (supponiamo di gonfiare una palla piatta) si viene a perdere la proprietà di unicità, come nel caso della sfera, in cui le geodetiche coincidono con i cerchi massimi. Lo studio di altre superfici su cui le geodetiche si richiudono su se stesse come nel caso della sfera, dando luogo alla proprietà della *convessità*, rappresenta un problema affascinante con conseguenze intuitivamente assai evidenti per il chiarimento di alcuni problemi fondamentali in diversi settori della fisica.

Il teorema di Gauss-Bonnet (la cui prima formulazione si deve a Gauss) racchiude l'essenziale degli sviluppi appena ricordati. Un suo enunciato più recente e completo (trattato dalla topologia differenziale e algebrica) si ottiene dividendo una superficie chiusa Σ dello spazio tridimensionale in un certo numero di triangoli geodetici (questo metodo è chiamato *triangolazione delle varietà*) e sommando il contributo dell'espressione $\int_T KdA = \alpha+ß+\gamma-\pi$ (dove l'integrale del primo membro è approssimato dalla somma dei prodotti della curvatura K per l'area di regioni infinitesime) per ciascuno di essi. Ne segue che $\int_\Sigma KdA = 2\pi\chi$, dove il numero χ denota la caratteristica di Eulero di Σ. Quest'ultima equazione è la più semplice di una famiglia considerevole di equazioni che mettono in relazione la curvatura di un oggetto con la sua topologia. Si osservi inoltre che essa non cambia quando viene fatta variare la metrica assegnata tramite la prima forma fondamentale della superficie. Dal teorema di Gauss-Bonnet si deduce che la sfera è l'unica superficie chiusa a curvatura gaussiana costante positiva, mentre il toro è l'unica superficie chiusa a curvatura identicamente nulla. Esistono, invece, molte superfici di curvatura gaussiana costante negativa, che presentano una geometria iperbolica. Tra i modelli più noti, citiamo la *pseudosfera* (scoperta da Eugenio Beltrami) formata dalla rotazione di una curva particolare, la trattrice, e il *semipiano superiore* formato da tutti i punti (x, y) con y positivo, su cui vale una metrica iperbolica (questo modello è dovuto a Poincaré).

7. Brevi cenni sul ruolo delle simmetrie in meccanica quantistica e nelle teorie di gauge

Secondo il grande fisico teorico Werner Heisenberg (1965),

> Il conflitto tra materialismo e idealismo ha segnato l'intera storia della filosofia, in particolare la storia della fisica. Questa antitesi è stata resa nuovamente attuale in una forma ben precisa dalla fisica atomica moderna, in particolare dalla teoria dei quanta. Fino alla scoperta del quanto d'azione di Planck, le moderne scienze naturali esatte, fisica e chimica, erano orientate materialisticamente. Nel secolo decimonono si consideravano gli atomi della chimica e le loro parti che oggi chiamiamo particelle elementari come ciò che esiste veramente, come il substrato reale d'ogni materia. Sembrava che l'esistenza degli atomi fosse una cosa evidente, indubitabile, e che non avesse bisogno di spiegazione. Ma Planck aveva svelato nei fenomeni di radiazione un carattere di discontinuità che sembrava collegato in modo sorprendente con l'esistenza degli atomi, e che d'altra parte non poteva essere spiegata in base alla loro esistenza. Questo carattere, rivelato dal quanto d'azione, fece pensare che tanto la discontinuità, quanto l'esistenza degli atomi fossero manifestazioni comuni di una legge fondamentale della natura, d'una struttura matematica insita nella natura, e che la sua formulazione potesse condurre a un'unificazione delle nostre idee sulla struttura della materia. È proprio ciò che avevano tentato i filosofi greci. Dunque *l'esistenza* degli atomi non era forse un fatto primordiale, non suscettibile di ulteriori spiegazioni. Quest'esistenza poteva anzi essere ricondotta, come in Plato-

ne, all'azione di leggi naturali formulabili matematicamente, dunque all'azione di simmetrie matematiche.

In effetti, le leggi delle radiazioni di Planck si distinguevano in un modo assai caratteristico dalle leggi naturali formulate in precedenza. Se le leggi naturali precedenti, per esempio quelle della meccanica di Newton, contenevano delle cosiddette costanti, queste designavano delle proprietà di oggetti, per esempio la loro massa o l'intensità della forza agente fra due corpi, o cose simili; invece il quanto d'azione di Planck, che appare come la costante caratteristica nella sua legge delle radiazioni, non rappresenta una proprietà di oggetti ma una proprietà della natura. A questa nuova concezione della natura contribuirono la scoperta di Planck (1900) sul corpo nero e il fenomeno della radiazione, e la scoperta di Einstein (1905) sul comportamento discreto dei fotoni. Il passo successivo furono le prime idee sulla meccanica quantistica. Nel 1913, Niels Bohr introdusse due postulati che apparivano ingiustificabili nell'ambito della fisica classica: (a) ogni atomo è caratterizzato da una successione discreta di livelli energetici E_1, E_2, E_3... In condizioni normali, l'atomo si trova nel livello di energia più bassa E_1 ma se viene perturbato, per esempio scaldandolo, può portarsi in uno dei livelli eccitati E_2, E_3,... dai quali dopo brevissimo tempo (circa 10^{-10} *s*) si ritorna al livello più basso; (b) le frequenze angolari v_{ij} delle righe spettrali di un atomo sono caratterizzate da una coppia (i, j) di numeri interi e sono legate alle energie E_1, E_2,... dei livelli energetici della relazione $\hbar v_{ij} = E_i - E_j$ $(E_i > E_j)$. In questa relazione, $\hbar$ è la stessa costante introdotta da Planck nello studio dello spettro del corpo nero, e da Einstein per interpretare l'effetto fotoelettrico. I postulati di Bohr non trovano spiegazione nella fisica classica secondo la quale l'energia può assumere ogni valore e non soltanto valori discreti. L'unica conclusione che si doveva trarre era dunque l'inapplicabilità della fisica classica ai fenomeni connessi alla struttura dell'atomo. Bisognava ammettere che, almeno all'interno dell'atomo, «Natura facit saltus», e abbandonare il sogno che le leggi scoperte dall'osservazione dei fenomeni macroscopici fossero le leggi universali della natura, valide comunque.

Lo sviluppo della fisica spettrale, grazie a raffinati strumenti d'indagine e delicate apparecchiature, metteva in grado i fisici di osservare un mondo fino ad allora del tutto invisibile, una regione della natura che, a tutti gli effetti, fino ad allora non esisteva. Era ormai chiaro che componenti invisibili e microscopici come elettroni, fotoni, nuclei si comportavano in modo molto diverso dagli oggetti del nostro mondo macroscopico. Il linguaggio con il quale gli spettri del mondo atomico, cioè le righe spettrali, o la curva continua del corpo nero, è assolutamente incomprensibile a chi non conosce quel linguaggio, il quale è decodificabile solo attraverso complicati ragionamenti matematici che hanno una connessione solo indiretta con l'osservazione fenomenologica iniziale; ed è percorrendo un lungo cammino di elaborazione e comprensione matematica che spesso i fisici giungono a scoprire "tesori", cioè proprietà e comportamenti del mondo fisico di ineffabile bellezza.

Un fenomeno spettrale, come quello della distribuzione spettrale della radiazione del corpo nero (nel modello teorico che lo descrive si riportano sulle ascisse le lunghezze d'onda – proporzionali all'inverso della frequenza – in unità di 10^{-7} m; sulle ordinate l'intensità in unità convenzionali; i numeri sulle curve indicano le temperature assolute; all'aumentare della temperatura il massimo della distribuzione si sposta verso le lunghezze d'onda minori) è riproducibile sperimentalmente. La natura spettrale fa parte quindi della realtà fisica (cristalli liquidi, laser, molecole, ecc.), ed essa presenta una straordinaria varietà e un ordine che rimane ancora in gran parte un mistero.

Sia la relatività ristretta che quella generale hanno avuto ciascuna come punto di partenza e come motivazione un solo fatto sperimentale: la costanza della velocità della luce per la prima, il principio d'equivalenza della massa inerziale e della massa gravitazionale per la seconda.

La meccanica quantistica è stata scoperta grazie a una ricca e varia fenomenologia disponibile, che andava tuttavia interpretata teoricamente e generalizzata matematicamente per acquisire un fondamento sicuro. Questo lavoro di generalizzazione teorica lo si deve innanzitutto a Heisenberg, al quale seguì l'opera importante di Dirac, Born e

Jordan, preceduti dai risultati già ottenuti da Bohr. Le loro scoperte e l'elaborazione teorica della meccanica quantistica rivelò innanzitutto che quello che fino ad allora avevamo letto nel "libro della natura" non era una descrizione di tutta la natura, ma un modello approssimato della natura valido solo nell'ambito dei fenomeni dai quali era stato derivato ma che non potesa essere esteso a priori al di là di tale ambito.

Forse dovremmo rinunciare alla speranza di scoprire «le vrai système du monde» (di Laplace). Lo comprese subito Einstein quando, al giovane Heisenberg che gli esponeva la sua teoria disse: «Se le sue idee fossero giuste dovremmo limitarci a parlare solo di quello che conosciamo della natura e non di quello che la natura realmente fa». Heisenberg non rinunciò a cercare di capire "quello che la natura realmente fa", a una nuova possibilità di pensiero. Per questo bisogna partire dalla consapevolezza, secondo il fisico tedesco, che «l'estensione dell'indagine scientifica a nuovi campi di esperienza avviene ben diversamente che applicando ad oggetti nuovi i principi precedentemente noti». Si trattava di cambiare questi stessi principi. Il mutamento che occorreva introdurre nella meccanica classica non era una modifica delle leggi del moto, quanto piuttosto la rinuncia a qualche concetto fondamentale. L'ispirazione gli venne da un esame della relatività d'Einstein. Scrive Heisenberg:

> Il centro della relatività speciale è la constatazione che la contemporaneità di due eventi in differenti luoghi è un concetto problematico. Similmente per la teoria dei quanti è della massima importanza la constatazione che non è sensatamente possibile parlare simultaneamente di una precisa posizione e di un preciso impulso di una particella.

È questo il contenuto del principio di indeterminazione, che Heisenberg espose in un fondamentale lavoro del 1927 ("Über die anschaulichen Inhalt der quantentheoretische Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik*), uno dei testi classici della letteratura scientifica del Novecento. In questo articolo Heisenberg dedusse dal formalismo della meccanica quantistica, che egli stesso aveva introdotto due anni prima, il significato fisico e intuitivo (*anschaulich Ihnalt*) della nuova meccanica. Formalmente il principio d'indeterminazione è espresso dalla celebre diseguaglianza

$$\Delta q \,.\, \Delta p \geq ½\, \hbar/2\pi,$$

dove Δq e Δp sono rispettivamente l'incertezza nella misura della posizione (spaziale) q e quella della misura dell'impulsione p di una particella (che è una variabile temporale). La diseguaglianza non dice che non si possa misurare con assoluta precisione la posizione q o la componente dell'impulso p (l'impulso è il prodotto della massa per la velocità). Afferma solo che non si può raggiungere una precisione infinita nella misura contemporanea di q e p: infatti, tanto più precisa è una delle due misure, tanto più imprecisa è l'altra.

È corretto dire che l'apparizione di questo principio sulla scena della fisica ha contribuito a rimettere profondamente in questione la concezione della natura che aveva dominato le scienze per più di tre secoli. Ha significato la fine dell'illusione di poter raggiungere una conoscenza completa (e assolutamente certa) della natura, o quella che si credeva dovesse essere una conoscenza completa, e quindi la fine di una previsione sicura dell'evoluzione futura di un sistema fisico. Ricordiamo infatti che, secondo la meccanica classica, il calcolo della traiettoria di una massa puntiforme richiede la conoscenza esatta della sua posizione e del suo impulso all'istante iniziale, proprio quella conoscenza che il principio di indeterminazione nega possa essere mai raggiunta. Il determinismo di Laplace che garantiva di poter predire l'avvenire dell'universo dalla conoscenza della posizione e della velocità iniziali risulta incompatibile con il risultato di Heisenberg. Tuttavia, già Poincaré (nei suoi lavori matematici fondamentali sulla meccanica celeste apparsi tra il 1892 e il 1899) mostrò che il determinismo laplaciano andava rimesso in questione se si voleva avere una conoscenza più estesa della natura e una comprensione profonda e più completa delle sue proprietà, per esempio se si voleva capire il comportamento di un sistema dinamico a tre corpi (Sole, Terra, Luna) e molti altri fenomeni fisici in cui la complessità cresce con l'aumentare delle variabili e degli effetti perturbativi.

Per ritornare agli sviluppi della meccanica quantistica, è importante sottolineare che per elaborare il suo teorema d'impossibilità delle teorie a variabili nascoste, Bell era partito dal riconoscimento dell'importanza del carattere intrinsecamente non locale della teoria di David Bohm: in essa la traiettoria di una particella localizzata in una regione dello spazio può dipendere istantaneamente da quel che accade in un luogo da lei arbitrariamente lontano. La non località che appare nella trattazione causale di Bohm del paradosso EPR (Einstein, Podolsky e Rosen) non è un difetto del modello teorico, ancora parziale, non essendo relativistico, ma una caratteristica necessaria che ogni teoria a variabili nascoste in grado di riprodurre perfettamente il formalismo quantistico deve contenere. Il ragionamento di Bell dimostra che se si effettuano due misure su due sistemi fisici (ad esempio una coppia di particelle di spin ½ che si muovono liberamente in direzioni opposte ad ognuna delle quali si associa un apparato che permette di misurare le componenti dello spin) che corrispondono a due eventi spazialmente separati, allora l'orientazione di uno degli apparati influenzerà il risultato della misurazione eseguita dall'altro apparato. Risulta dunque impossibile predire con certezza il risultato di una qualunque delle componenti dello spin di una delle particelle da una misura della stessa componente dell'altra particella, in quanto la funzione quantomeccanica ψ non determina il risultato di una osservazione individuale. L'idea della non località quantistica, che viola il cosiddetto *principio di località* (di Einstein), secondo il quale non è ragionevole pensare che un dato fenomeno fisico possa avvenire indipendentemente dalla distanza dall'evento che lo ha causato, è che sia invece l'interazione tra i due sistemi fisici che conta, perché grazie ad essa le due rappresentazioni (ossia gli stati quantici delle due particelle) sono diventati aggrovigliati (*entangled*).

La definizione di questo importante fenomeno fu data per la prima volta da Erwin Schrödinger nel 1935 come commento al paradosso EPR:

Quando due sistemi, dei quali conosciamo i rispettivi stati, interagiscono temporaneamente mediante forze note, e quando dopo un periodo di influenza mutua si separano nuovamente, essi non possono più essere descritti come prima, cioè attribuendo a ciascuno di essi un suo stato caratteristico.

Secondo Schrödinger, l'*entanglement* è il tratto caratteristico della meccanica quantistica, il cui significato filosofico peculiare risiede nell'idea di non località delle interazioni tra le particelle; e, si potrebbe aggiungere, d'indiscernibilità delle particelle che interagiscono; l'oggetto della fisica non è più la particella isolata, ma l'interazione tra due o più particelle e l'intreccio che così esse formano; il processo di interazione modifica l'azione e lo stato delle particelle. Ad esempio, l'interazione gravitazionale tra materia oscura e materia ordinaria modella il cosmo in una ragnatela di galassie; gli scambi e le collisioni tra le diverse forze quantistiche sembra modellare lo spazio-tempo alla scala di Planck in una struttura ripiegata e annodata estremamente complessa e dinamica.

Il principio d'indeterminazione (chiamato anche "relazioni d'incertezza") stabilisce un limite fenomenologico all'indipendenza del sistema fisico dall'osservatore e dall'osservazione, le due cose vanno distinte ma non sono più separabili, quantomeno a livello microscopico; infatti, si osserva un'*intricazione quantistica* tra il sistema fisico e il sistema di osservazione e di misura impiegato dall'osservatore (dal fisico). Chiariamo questo concetto con un esempio. Consideriamo due sistemi fisici apparentemente simili, eccetto che uno è macroscopico e l'altro è microscopico: un pianeta che si muove nel campo gravitazionale del Sole e un elettrone che si muove nel campo coulombiano di un protone (cioè un atomo di idrogeno). Il campo di forza che agisce nei due casi ha la stessa dipendenza dalla distanza – pianeta-Sole o elettrone-protone –: in ambedue i casi la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza $f = -1/d^2$. La differenza tra i due casi sta nel fatto che il sistema planetario (macroscopico) resta essenzialmente indisturbato dall'osservazione, mentre l'atomo d'idrogeno (microscopico) è alterato o perturbato in maniera essenziale. Heisenberg ha infatti dimostrato che per osservare l'orbita di un elettrone in un atomo dovremmo usare una radiazione di frequenza, e quindi d'impulso, così grande che l'elettrone verrebbe espulso dall'atomo. Il concetto di orbita di un elettrone in un atomo, diversamente dal concetto classico di orbita di un grave terrestre o di un corpo celeste, non ha dunque senso perché è inosservabile.

Ma questo significa per Heisenberg, e secondo la meccanica quantistica, che ha senso solo ciò che è osservabile tramite un apparato di osservazione e di misura? Eppure noi sappiamo che ci sono molti fenomeni, soprattutto alla scala subatomica di Planck e anche a quella dell'intero Universo, che non sono ancora mai stati osservati ma che tuttavia hanno un senso all'interno del modello o della teoria fisica in cui sono stati pensati.

Un altro aspetto importante è che la struttura matematica della fisica classica differisce da quella della meccanica quantistica. Quest'ultima mostra il ruolo fondamentale che i concetti e le strutture matematiche svolgono per la spiegazione del mondo fisico, e quindi, si presume, nel comportamento reale dei fenomeni fisici. Tre concetti matematici avranno un ruolo fondamentale per gli sviluppi teorici prima della meccanica quantistica poi delle teorie dei campi quantistici: quello di spazio d'operatori di Hilbert a un numero infinito di dimensioni, quello di non commutatività e quello di gruppo di Lie non abeliano (un gruppo non abeliano è per definizione non commutativo).

Dal punto di vista fenomenologico, un sistema fisico è descritto, sia in meccanica classica che quantistica, dalla misura di grandezze fisiche ognuna delle quali corrisponde a un ben determinato strumento di misura. Chiameremo «osservabile» l'oggetto matematico che rappresenta un particolare strumento di misura, e chiameremo «stato» del sistema l'oggetto matematico che determina i valori medi degli osservabili. Consideriamo il più semplice sistema fisico, cioè una particella che si muove lungo una retta in un potenziale dato, per esempio un oscillatore. Questo sistema è descritto da due grandezze fisiche, la posizione q e l'impulso p. Ogni altra quantità, l'energia per esempio, è una grandezza di q e di p. Chiaramente gli osservabili q e p sono oggetti matematici molto diversi a seconda che li si consideri in meccanica classica o in meccanica quantistica. Secondo la meccanica classica, q e p possono essere ambedue misurati con infinita precisone ad ogni istante, e sono così rappresentabili come funzioni continue e differenziabili del tempo (o rispetto al tempo).

I valori di q e p a un dato istante determinano completamente lo stato del sistema classico. La situazione in meccanica quantistica è diversa. Infatti il principio di indeterminazione ci dice che q e p non possono essere misurati contemporaneamente con infinita precisione e che il prodotto delle loro incertezze soddisfa il principio d'indeterminazione di Heisenberg. La dimostrazione data dal fisico tedesco di questa relazione implica che la posizione q e l'impulso p non possono essere rappresentati da oggetti matematici il cui prodotto commuti, cioè tali che il prodotto qp sia uguale a pq come avviene per i numeri reali (invertendo l'ordine dei fattori il risultato non cambia) o per le funzioni reali del tempo della meccanica classica. Questi oggetti matematici richiedono che s'introduca una geometria e un'algebra diverse al fine di poter caratterizzare le principali proprietà di una matematica e fisica non commutative.

L'immaginazione matematica non è senza legami con il mondo fisico e i fenomeni naturali, anzi essa ha permesso in molti casi di scoprire strutture matematiche nuove che si sono rivelate essere fondamentali per la comprensione delle proprietà dei fenomeni fisici. È il caso delle simmetrie o gruppi trasformazione, ed è il caso anche, come dicevamo prima, della non-commutatività che svolge un ruolo essenziale in meccanica quantistica e nelle teorie quantistiche dei campi. Già nella seconda metà dell'Ottocento, Hamilton, Cayley e in particolare Clifford avevano scoperto delle entità matematiche per le quali si può definire un prodotto non commutativo. Un esempio di tali entità sono le trasformazioni di un gruppo come l'insieme delle rotazioni e delle traslazioni nel piano, ma ce ne sono diversi altri, ad esempio le matrici, per le quali si può definire la somma: quest'ultima è commutativa, cioè $a+b = b+a$, mentre il prodotto non lo è, cioè ab è diverso da ba. L'insieme di tali entità o strutture matematiche, opportunamente definite, viene chiamata *algebra non commutativa* (o *non abeliana*).

Ritornando a Heisenberg, egli ha dimostrato che se si definisce il prodotto delle p e delle q con la relazione $qp - pq = i\,\hbar/2\pi^2$, dove h è la costante di Planck, e $i = \sqrt{-1}$, e se si definiscono opportunamente le incertezze Δp e Δq, si ottiene il famoso principio di indeterminazione $\Delta p \,.\, \Delta q \geq \frac{1}{2}\, \hbar/2\pi$. Naturalmente anche lo stato del sistema non può essere rappresentato dai valori di p e q poiché questi non possono essere misurati simultaneamente. Lo stato potrà esprimere solo la probabilità che q e p abbiano determinati valori. La *probabilità*, nel senso di un qualcosa per il quale non c'è nessuna certezza che accada ma solo una certa possibilità, diviene un elemento essenziale della teoria fisica e, in questo senso, il determinismo della meccanica classica perde la sua validità. Tuttavia l'evoluzione temporale dello stato è retta, come ha dimostrato E. Schrödinger, da un'equazione deterministica, la famosa equazione di Schrödinger.

Si possono qui menzionare due tipi di problemi, che furono già discussi in passato soprattutto dai filosofi greci, sollevati nuovamente dalla teoria dei quanti di Planck e la sua scoperta della natura discontinua della materia, degli elettroni. Il primo di questi problemi concerne l'essenza della materia. Per essere storicamente più precisi, si tratta dell'antico problema dei filosofi greci, ossia la ricerca di come sia possibile ricondurre a principi semplici, a concetti intelligibili, la varietà multiforme dei fenomeni che si verificano nel mondo materiale (fisico). L'altro aspetto riguarda un problema epistemologico che si è posto ripetutamente, in modo particolare da Kant in poi: ci si domanda fino a che punto sia possibile dare un significato oggettivo a ciò che osserviamo nella natura o, in genere, a ciò che cade sotto i nostri sensi. In altre parole, si tratta di determinare un fatto oggettivo che accade indipendentemente dall'osservatore, partendo dai fenomeni osservati. Kant aveva parlato delle "cose in sé", che il filosofo riteneva inconoscibili in termini oggettivi e intersoggettivi. Nella teoria dei quanti il problema riguardante il substrato oggettivo dei fenomeni è stato posto in un modo nuovo e inaspettato.

La scoperta del quanto d'azione di Planck introduce un problema fondamentale della fisica, quello dell'ordine di grandezza o della scala alla quale si producono i fenomeni. La scoperta fatta da Planck del quanto d'azione, che appare come costante caratteristica delle sue leggi delle radiazioni, non rappresenta una proprietà di oggetti ma una proprietà della natura, stabilisce una distinzione nella scala di grandezze che si osserva nella natura, e perciò mostra nello stesso tempo che, in ambienti in cui gli effetti risultano molto grandi di fronte al quanto d'azione di Planck, i fenomeni naturali hanno un decorso diverso da quelli in cui gli effetti sono dell'ordine di grandezza dell'atomo, dunque del quanto di Planck. Mentre le leggi della fisica classica, per esempio della meccanica di Newton, dovevano in principio avere lo stesso valore per tutti gli ordini di grandezze (il movimento della Luna intorno alla Terra doveva verificarsi con le stesse leggi che la caduta di una mela dall'albero o la deviazione di una particella alfa che vola via rasentando il nucleo di un atomo), la legge delle radiazioni di Planck mostrava per la prima volta che ci sono in natura distinzioni secondo scale di grandezze. In altri termini, essa mostrava che fenomeni che avvengono a scale spaziali ed anche temporali e di livelli di energia diversi, non sono dello stesso tipo, anche se possono esserci delle relazioni e delle strutture fondamentali di tipo matematico e fisico comuni o quantomeno simili a tutti questi fenomeni. Da qui l'idea che la varietà e complessità della natura e del mondo fisico (per esempio le diverse transizioni di fase della materia) possa essere retta da qualche simmetria fondamentale (che inglobano altre simmetrie più parziali) e da uno spazio topologico generale la cui struttura spiega l'esistenza di strutture diverse.

Già pochi anni dopo la scoperta di Planck fu compreso il significato di una seconda "costante di misura". La teoria della relatività speciale di Einstein rese chiaro ai fisici che la velocità della luce non rappresenta la qualità di una materia speciale, l'"etere", a cui doveva incombere la propagazione della luce (come si era congetturato a suo tempo nell'elettrodinamica), ma una qualità dello spazio e del tempo, dunque una qualità affatto generale della natura indipendente dagli oggetti speciali che ne fanno parte. Perciò anche la velocità della luce può essere considerata come una costante naturale, relativa alle scale di grandezze. I nostri concetti intuitivi di spazio e di tempo possono essere applicati a quei fenomeni in cui si presentano delle velocità piccole in confronto alla velocità della luce. Inversamente i noti paradossi che si riferiscono alla relatività si basano proprio sul fatto che fenomeni in cui intervengono velocità vicine a quella della luce non possono essere interpretati coi nostri concetti comuni di spazio e di tempo. Un esempio è il noto paradosso degli orologi, ossia il fatto che, per un osservatore che si sposti velocemente, il tempo scorre in apparenza più lentamente che per un osservatore in quiete.

I lavori di Bohr, Kramers e Slaletr (1924), secondo i quali il campo d'onde elettromagnetico, a cui sono dovuti in modo tanto evidente i fenomeni d'interferenza e di diffrazione, determina solo la probabilità che un atomo assorba o emetta per quanti (dunque per pacchetti discreti di fotoni) l'energia luminosa nella regione dello spazio considerata, contenevano l'idea d'importanza decisiva che le leggi naturali non determinano il verificarsi di un avvenimento, ma la probabilità che esso si verifichi; che inoltre questa probabilità deve essere messa in relazione con un campo d'onde che ubbidisca a un'equazione d'onde formulabile matematicamente.

Si tratta di una specie di stato intermedio di verità che sta in mezzo tra la verità massiccia della materia e la verità astratta dell'idea o dell'immagine. Nella teoria moderna dei quanti questo concetto di possibilità assume una nuova veste: è formulato quantitativamente come una probabilità e sottomesso a leggi naturali esprimibili matematicamente. Le leggi naturali formulate in termini matematici non determinano più i fenomeni stessi ma la loro possibilità, la probabilità che succeda qualche cosa.

Nella fisica moderna (quantistica) si ammette che la determinatezza dei fenomeni esiste solo in quanto essi sono descritti con i concetti della fisica classica. L'applicazione di questi concetti è limitata, d'altra parte, dalle cosiddette relazioni d'indeterminazione; queste contengono delle restrizioni quantitative sui limiti posti all'applicazione dei concetti classici.

Scrive Heisenberg:

> Con ciò si compiva un distacco decisivo della fisica classica e si ritornava in ultima analisi a una concezione che aveva già assunto una grande importanza nella filosofia di Aristotele. Le onde di propabilità di Bohr, Kramers, Slater possono essere interpretate come una formulazione quantitativa del concetto aristotelico di *dinamica*, di possibilità, chiamato anche più tardi col

nome latino *potentia*. L'idea che quanto succede non sia determinato in modo perentorio e definitivo, ma che già la possibilità o tendenza al verificarsi di un fatto possieda una specie di verità, ha nella filosofia di Aristotele una parte decisiva.

8. Gruppi e teorie di gauge, invarianza locale e interazioni fisiche

Hermann Weyl sviluppò un approccio per lo studio della meccanica quantistica interamente basato sul concetto matematico di gruppo. La questione fondamentale che egli si pone in quegli anni (1930-35) è di capire che la spiegazione delle proprietà fondamentali delle particelle può essere ricondotta allo studio più generale delle proprietà di simmetria delle leggi quantistiche. Da un punto di vista matematico ciò comporta che si conosca la struttura di certe classi di gruppi di Lie compatti e le loro rappresentazioni algebriche. Dal punto di vista fisico, si tratta di capire se le proprietà delle particelle soddisfano le simmetrie fondamentali che si conoscono, vale a dire destra/sinistra, passato/futuro, carica (elettrica) positiva/carica (elettrica) negativa.

La generalizzazione non lineare delle equazioni di Maxwell alla spiegazione delle proprietà delle particelle elementari ha richiesto l'introduzione di diversi tipi di simmetria: (i) simmetrie *esterne* o *spazio-temporali*, ovvero i gruppi di Lorentz, di Poincaré e il gruppo conforme – nel caso di massa a riposo nulla; (ii) le simmetrie interne, cioè i gruppi SU(2) o SU(3) per certe proprietà delle particelle elementari; (iii) le simmetrie di covarianza, ovvero la possibilità di combinare certe proprietà quantiche delle particelle elementari con la gravitazione in uno spazio curvo che possiede determinate proprietà topologiche.

Nell'elettrodinamica quantistica l'operazione di simmetria consiste in un cambiamento di fase del campo dell'elettrone, cosicché una di queste fasi si trova associata a un'interazione con il campo elettromagnetico. Possiamo così immaginare un elettrone sottomesso a due cambiamenti di fase consecutivi: l'emissione di un fotone, poi il suo assorbimento. Si verifica che la sequenza secondo la quale si producono tali cambiamenti di fase sono invertiti, per cui un fotone viene prima assorbito, poi emesso: il risultato finale sarà quindi lo stesso. Ne risulta che una serie infinita di cambiamenti di fase può essere effettuata e il risultato finale sarà semplicemente la somma algebrica di tutti i cambiamenti indipendentemente dall'ordine in cui la sequenza è stata effettuata. Invece, nella teoria di Yang-Mills (su cui ritorneremo tra poco), dove l'operazione di simmetria è una rotazione locale dell'isospin, il risultato di più operazioni può essere diverso. Supponiamo un adrone (una particella subatomica composta da quark e antiquark legati dalla forza nucleare forte) soggetto a una trasformazione, *B*, dopo una serie di trasformazioni (cioè un cambiamento di simmetria), la particella avrà un'orientazione corrispondente a quella di un protone (una particella subatomica di carica elettrica positiva che insieme al neutrone è un costituente del nucleo atomico). Supponiamo ora di applicare la stessa trasformazione all'adrone ma secondo un ordine inverso, cioè prima *B* e poi *A*. In generale, lo stato finale in cui si troverà la particella non sarà lo stesso di quello precedente: la nuova particella potrà essere un neutrino[7] invece di un protone. Il risultato delle due trasformazioni dipende dunque dall'ordine nel quale esse vanno eseguite.

Il concetto di simmetria svolge un ruolo fondamentale nelle teorie di gauge in fisica teorica. Le nuove teorie di gauge furono elaborate da Yang e Mills negli anni 50 del secolo scorso (il primo lavoro importante è del 1954), al seguito dei primi tentativi fatti da Hermann Weyl per introdurre una geometria locale più generale rispetto a quella riemanniana capace di inglobare in un modello esplicativo unitario alcune proprietà fondamentali dei campi quantistici. La teoria di Yang e Mills offre un modello geometrico per spiegare le interazioni forti e per comprenderne gli effetti quantistici. La sua principale caratteristica è di ammettere come gruppo di invarianza un gruppo di Lie non abeliano, che è il più "semplice" dei gruppi non commutativi. Questa

7 Il neutrino è una particella priva di carica elettrica e con una massa estremamente piccola, che non si è ancora riusciti a misurare. I neutrini interagiscono molto raramente con la materia; possono infatti attraversare praticamente indisturbati enormi spessori di materia.

proprietà matematica del gruppo di simmetrie conferisce alla teoria una struttura molto ricca e permette di trovare delle equazioni di campo più generali di quelle di Maxwell. Già questo mostra a sufficienza il ruolo fondamentale che hanno le simmetrie geometriche nella comprensione dei problemi di fisica studiati dalle teorie di gauge.

Conviene ricordare che già nella teoria proposta da Weyl nel 1929 appare, in più delle variabili di posizione nello spazio-tempo, un parametro di spazio interno sul quale il gruppo di fase agisce. Il campo che s'identifica alla funzione d'onda della particella può dunque essere visto come se associassimo a ogni punto dello spazio-tempo un punto dello spazio di configurazione interna, che nel caso dell'elettromagnetismo è un angolo. Una gauge esige allora che si combinino le coordinate dello spazio-tempo con i parametri dello spazio fisico interno. La teoria di Weyl soddisfa un principio "d'invarianza locale"; in altre parole, le equazioni di campo restano invariate quando si applica una serie di trasformazioni o di simmetrie al sistema fisico. Gli sviluppi delle teorie di gauge mostrano chiaramente che le proprietà fondamentali delle particelle e delle loro interazioni dipendono essenzialmente dalla conoscenza di alcuni gruppi di simmetria. In affetti, l'idea più importante delle teorie di gauge è quelle di simmetria: vale a dire l'idea che un "oggetto" o una "quantità" fisica, alla scala quantica, è simmetrico se possiamo applicargli una trasformazione che conserva la sua struttura. Per esempio, possiamo applicare una rotazione di 60° a un fiocco di neve senza modificare la sua forma. Si può anche farlo ruotare di un angolo multiplo di 60° o applicargli più trasformazioni successive e il risultato sarà lo stesso. Una situazione che si incontra di frequente è che più trasformazioni differenti (per esempio rotazioni e traslazioni) lasciano un oggetto invariato: si dirà allora che l'insieme di queste trasformazioni possiede una struttura matematica di gruppo e forma il gruppo di simmetrie dell'oggetto.

Sono soprattutto i gruppi continui, come i gruppi di Lie, che appaiono nella teoria quantistica dei campi. Le trasformazioni di questi gruppi dipendono da uno o più parametri che variano in modo continuo: è il caso, per esempio, del gruppo di rotazioni di uno spazio a tre dimensioni, i cui parametri sono i tre angoli di Eulero. La struttura matematica dei gruppi di Lie è molto ricca ed è per questo che hanno un ruolo importante in fisica: infatti, ad ogni gruppo continuo di simmetrie corrisponde una legge di conservazione di una quantità fisica. Questa proprietà fondamentale del mondo fisico è l'essenza del teorema di Emmy Nother. La conservazione dell'energia corrisponde all'invarianza della teoria rispetto alle rotazioni nello spazio. La fisica e la geometria si trovano ad essere profondamente legate, a far parte dello stesso processo di trasformazione della materia e di organizzazione del mondo fisico a diverse scale e livelli.

Le leggi di conservazione hanno un'importanza fondamentale nello studio dei sistemi fisici. Diremo che una teoria (che è innanzitutto un modello di un sistema fisico) presenta una simmetria *globale* se rimane invariata rispetto all'azione delle trasformazioni di un gruppo, a condizione che la stessa trasformazione sia simultaneamente applicata a tutti i punti dello spazio. Diremo, invece, che la simmetria è *locale* se la trasformazione agisce diversamente in ogni singolo punto. Poiché si suppone generalmente che lo spazio sia continuo, è piuttosto naturale che siano i gruppi *continui*, o gruppi di Lie, a svolgere un ruolo preponderante nelle teorie caratterizzate da una simmetria locale. Diversamente da ciò che si sarebbe portati a pensare, l'esigenza di soddisfare una simmetria locale è molto più vincolante rispetto alla simmetria globale: mentre quest'ultima è, per così dire, autosufficiente, nel caso della simmetria locale è necessario aggiungere un elemento alla teoria, ovvero un campo, ed è per questo che si richiede alla teoria di possedere una simmetria locale.

Per meglio arrivare a riconoscere la natura intrinseca delle simmetrie nella teoria quantistica dei campi, che come abbiamo visto possono essere sia di natura locale sia di natura globale, occorre avere un'idea sufficientemente chiara delle proprietà topologiche, globali e locali, dello spazio (o della varietà) in cui si suppone "esistano" e agiscano le particelle alla scala di Planck. In altre parole, la conoscenza della struttura topologica dello spazio fisico potrebbe permettere non solo di identificare l'esistenza di nuove simmetrie in più di quelle che già si conoscono, ma anche la presenza di nuovi campi fisici prodotti dall'azione di queste altre simmetrie.

D'altra parte, come abbiamo rimarcato sopra, la simmetria locale di certe teorie fisiche, come ad esempio l'elettrodinamica quantistica, può essere ripristinata aggiungendo un nuovo campo alla teoria, così, ad esempio, l'elettrodinamica quantistica risulta dalla combinazione del campo materiale di elettroni con il campo elettromagnetico; mentre, invece, nella relatività generale questo campo è naturalmente quello della gravità.

L'elettromagnetismo di Maxwelll e la relatività generale di Einstein ammettono entrambe una simmetria di gauge locale. In quest'ultima, la simmetria non è associata a un campo che si propaga attraverso lo spazio, ma alla struttura dello spazio-tempo stesso, vale a dire alla sua geometria, e in realtà (questo lo si è capito più tardi) anche alla sua topologia, la quale può generare effetti fisici anche in assenza di campi gravitazionali forti. Diversamente dalle due teorie appena menzionate, la prima teoria di gauge per le interazioni forti, proposta da Yang e Mills nel 1954, ammetteva una simmetria globale. Il problema che subito allora si pose era di capire quali conseguenze potessero sorgere se si cambiava la simmetria globale in una simmetria locale. Quello che succede in questo caso, come in altri casi, è che l'invarianza locale si conserva solo se si aggiungono nuovi campi alla teoria. Più precisamente, quando la rotazione dell'isospin avviene diversamente in ogni singolo punto (cioè non è la stessa per l'intero spazio) le leggi della fisica rimangono invariate se si aggiungono nove nuovi campi.

Una delle più importanti caratteristiche della fisica contemporanea è di aver geometrizzato le forze. I primi tentativi risalgono a Riemann, Clifford e Poincaré[8]. In realtà, essi fanno parte di un programma più generale di geometrizzazione della matematica e della fisica portato

8 Per una ricostruzione concettuale degli sviluppi di tale programma, cfr. i nostri seguenti lavori: Luciano Boi, *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, prefazione di René Thom, Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1995; Luciano Boi, *L'espace, concept abstrait et/ou physique; la géométrie entre formalisation mathématique et étude de la nature*, in Luciano Boi, Dominique Flament, Jean.Michel Salanskis (eds.), *1830-1930: A Century of Geometry, History, Mathematics and Epistemology*, History and Mathematics, Lecture Notes in «Physics», vol. 402, Heidelberg, Springer-Verlag, 1992, pp. 63-90.

avanti da Einstein, E. Cartan e Weyl nella prima metà del secolo scorso. Seguendo approcci diversi, tutti e tre hanno mostrato che potevano darsi i principi matematici di una teoria più generale rispetto a quella riemanniana atta a spiegare i fenomeni fisici come tipi di eventi definiti in un determinato modello di spazio-tempo.

Dopo i lavori fondamentali di Riemann, Clifford e Poincaré in matematica e in fisica, la relatività generale ha costituito la prima realizzazione importante di questo programma di geometrizzazione. La sua proprietà matematica fondamentale è di ammettere, per i fenomeni fisici alla scala dell'universo, un gruppo di simmetria rispetto al quale le loro leggi si conservano invariate. Si tratta del gruppo di diffeomorfismi che lascia invariata la forma quadratica, cioè la metrica, di una varietà pseudoriemanniana di dimensione 4. Più precisamente, si può effettuare una trasformazione qualsiasi del sistema di coordinate nell'intorno di un punto dato in questo stesso spazio-tempo senza che le leggi fisiche ne risultino modificate. Possiamo affermare, in un certo senso, che la scelta delle coordinate è arbitraria (o che è una convenzione teorica). Ma la struttura geometrica dello spazio-tempo, caratterizzato in questo caso da una metrica pseudoriemanniana di tipo iperbolico, non è affatto arbitraria. L'elemento forse più significativo della relatività generale è di aver fornito una descrizione unitaria dello spazio, del tempo e della gravitazione. Secondo questo modello, lo spazio-tempo è una varietà di dim. 4, M, con una metrica $g_{\mu\nu}$ di signatura (3, 1), la cui *connessione* rappresenta la forza di gravità. In altre parole, la gravità è "portata" da un campo connessione simmetrico: da un oggetto dunque di natura essenzialmente geometrica. In effetti Einstein era partito dall'ipotesi che ogni fenomeno fisico poteva essere associato a un tensore T, che chiama *tensore d'energia*, il quale verifica le due equazioni

$$T^{\mu\nu} \equiv T^{\nu\mu}$$
$$\Delta T \equiv 0.$$

Ciò ha permesso di stabilire l'identità tra il tensore di energia e il tensore metrico (o di Riemann); quest'ultimo può essere definito secondo un principio variazionale e nell'equazione appare come la grandezza coniugata della connessione riemanniana (M, g). La legge fondamentale della relatività generale si esprime attraverso l'equazione di Einstein

$$R_{\mu\nu} - 1/2\, g_{\mu\nu} R = 8\pi\, T_{\mu\nu},$$

dove $R_{\mu\nu}$ e R sono, rispettivamente, la curvatura di Ricci e la curvatura scalare di $g_{\mu\nu}$, e $T_{\mu\nu}$ è il tensore d'energia della materia. In assenza di materia, l'equazione di Einstein per la varietà spazio-tempo si scrive

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Certi sviluppi recenti della fisica teorica mostrano che la struttura geometrica dello spazio-tempo alla scala quantica potrebbe essere all'origine non solo del comportamento cinematico, ma anche di quello dinamico dei fenomeni fisici che si generano in esso. Sappiamo che ciò è vero per il campo gravitazionale, il quale secondo la relatività generale è determinato dalla struttura geometrica dello spazio-tempo e in particolare dalla sua curvatura, ma, in più, anche gli altri campi di materia sembrano essere suscettibili di un'interpretazione geometrica. Ed è in ciò, infatti, che risiede il significato essenziale delle teorie di gauge. La teoria delle corde (e supercorde) sviluppa la stessa idea fondamentale arricchendola di nuove strutture matematiche, poiché essa cerca di mostrare che i diversi campi di materia hanno verosimilmente un'origine geometrica comune, o che si costituiscono a partire dalla struttura geometrica e topologica stessa come manifestazioni delle sue fluttuazioni e dei suoi cambiamenti. Cosicché, secondo la teoria delle corde i campi e le interazioni tra le diverse forme di materia alla scala di Planck e a bassissime energie emergerebbero dalla geometria (e dalla topologia) nello stesso modo in cui la gravità risulta dalla geometria (metrica e curvatura) dello spazio-tempo a scala macroscopica dell'universo.

Riassunto Appoggiandosi su idee e risultati ottenuti da diversi autori nei secoli precedenti e in particolare sulla rivoluzione astronomica esposta da Nicolò Copernico nel *De*

revolutionibus orbium cœlestium (1543), Galileo riuscì a dare una formulazione della legge matematica della caduta dei gravi, fece alcune scoperte astronomiche, enunciò il "principio di relatività", i principi di inerzia e di scomposizione delle forze, e fu un convinto assertore dell'importanza e della validità del sistema copernicano, tant'è che molti dei suoi sforzi come scienziato furono rivolti a farne riconoscere la novità radicale nella concezione dell'universo. Il "principio di relatività galileiana" sarà sviluppato nei secoli successivi e diventerà uno dei principi fondamentali dell'intera fisica grazie soprattutto alle scoperte fatte da Einstein con la sua teoria della relatività ristretta del 1905 e della teoria della relatività generale del 1915-16, quest'ultima basata sul principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale; in altre parole, il loro rapporto è costante e uguale per tutti i corpi. Dopo le osservazioni e scoperte importanti fatte da Galilei tra il 1609 (il corto trattato sull'astronomia *Sidereus Nuncius* appare nel 1610 e *Il Saggiatore* viene pubblicato nel 1623) e il 1632 (anno della pubblicazione del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano*), riguardanti le leggi del moto dei corpi terrestri e celesti, un progresso decisivo fu ottenuto da Isaac Newton, che a partire dal 1666 riuscì ad unificare in una teoria coerente i diversi risultati di Keplero sulle cause dei moti planetari e di Cartesio sul peso dei corpi sulla Terra, dando alle leggi dinamiche dei suoi predecessori una sistemazione teorica decisamente più intelligibile. Risolto il problema dinamico del moto di un corpo grazie al modello geometrico introdotto da Keplero, Newton unificò concettualmente il principio cartesiano del moto rettilineo uniforme di una particella materiale in *vacuo*, la legge galileiana della composizione delle forze e le tre leggi di Keplero circa i moti planetari, pervenendo così alla formulazione matematica della legge della gravitazione universale (nella sua grande opera *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, del 1680). Il concetto di simmetria ha avuto un ruolo capitale nel cammino tortuoso e travagliato della scienza che ha portato tra metà Ottocento e inizi Novecento ad una conoscenza approfondita delle regolarità fondamentali del mondo fisico, di cui però già Keplero aveva avuto un'intuizione profonda. In particolare, si è via via capito il nesso fondamentale tra simmetrie geometriche, invarianze di certe grandezze e leggi fisiche. L'idea di simmetria, matematicamente espressa tramite il concetto di gruppo di trasformazioni (grazie ai lavori di Klein, Lie, Weyl e E. Cartan), che può essere continuo (infinito) o discreto (finito), ha aperto la strada a nuove scoperte fondamentali nella fisica del XX secolo, in particolare le due teorie della relatività, ristretta e generale, e la meccanica quantistica, e permesso la formulazione rigorosa dell'elettrodinamica quantistica (teoria che unifica materia e radiazione) e delle teorie di gauge non abeliane basate su un gruppo di simmetrie locali le cui trasformazioni sono non-commutative. Questi gruppi di simmetrie possono essere definiti e agire dinamicamente su certi spazi topologici di cui le strutture fondamentali sono invariati per deformazione.

Abstract Relying upon ideas and results obtained by different scientists during the previous centuries and notably on the astronomical revolution presented by Copernicus

in *De revolutionibus orbium cœlestium* (1543), Galileo Galilei succeeded in formulating the mathematical law of falling bodies, made some astronomical discoveries, and states the "principle of relativity", the principle of inertia and the principle of decomposition of forces, and also he was a convinced advocate of the importance and validity of the Copernican system, so much so that many of his much efforts as a scientist were directed at recognizing the radical change in the vision of the universe it produced. The "principle of galilean relativity" will be developed in the following centuries and will became one of the most fundamental principles of physics thanks especially to Einstein's discovery of special relativity (1905) and general relativity (1915-16), the last based on the principle of equivalence between inertial mass and gravitational mass. After the important observations and discoveries made by Galilei between 1609 (the short astronomical treatise *Sidereus Nuncius* appeared in 1610 and *Il Saggiatore* was published in 1623) and 1632 (with the publication of the *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano*) concerning the laws of the movement of terrestrial and celestial bodies, a major progress was obtained by Isaac Newton, which around the year 1666 succeeded in unifying in a coherent theory the different results by Kepler on the causes of planetary movements and by Descartes on the weight of the bodies on the Earth; and therefore he was able to give to the dynamical laws of his predecessors a more intelligible theoretical setting. With the resolution of the dynamical problem of the movement of a body thanks to the geometrical model introduced by Kepler, Newton conceptually unify the cartesian principle of rectilinear uniform movement of a material particle in *vacuo* with the Galilean law of the composition of forces and the three laws of Kepler on the planetary movements, obtaining thus the mathematical formulation of the law of universal gravitation. Furthermore, it has been stressed that the concept of symmetry played a key role in the tortuous path, which led, between the second half of the XIX century and the beginning of the XX century, to a deep knowledge of fundamental regularities of the physical world, although already Kepler has had a profound intuition of this fact. In particular, one has gradually understood the fundamental link relating the geometrical symmetries to the invariance of certain quantities and the physical laws. The idea of symmetry, mathematically expressed through the concept of a group of transformations (due to the works of Klein, Lie, Weyl and E. Cartan), which can be either continuous (i.e. infinite) or discrete (i.e. finite) paved the way to new fundamental discoveries in the XX century physics, particularly to the two theories of Einstein's relativity, special and general, and quantum mechanics, and allowed for the rigorous formulation of the quantum electrodynamics (a theory which unify matter and radiation) and of non-Abelian gauge theories, resting on groups of local symmetries whose transformations are non-commutative. These groups of symmetries can be well defined and they act dynamically upon certain topological spaces whose fundamental structures are invariant by deformation.